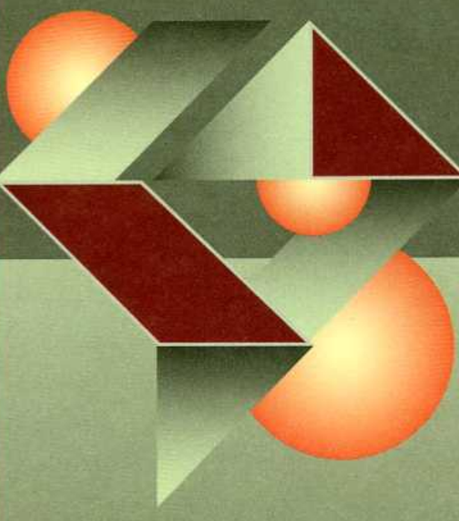
МГУ – ШКОЛЕ

Б. Г. Зив

Геометрия

11

Дидактические материалы



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ – ШКОЛЕ

Б. Г. Зив

Геометрия

Дидактические материалы

11 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

14-е издание

Москва «Просвещение» 2016

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
З-59

12+

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 г.

Зив Б. Г.

З-59 Геометрия. Дидактические материалы. 11 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / Б. Г. Зив. — 14-е изд. — М. : Просвещение, 2016. — 128 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-042304-5.

Учебное пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по геометрии, а также математические диктанты. Дидактические материалы адресованы учителям, работающим по учебнику «Геометрия, 10—11» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Л. С. Киселевой, Э. Г. Позняка, но могут быть использованы при работе и по другим учебникам.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-042304-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии приведены 19 самостоятельных работ, одна дополнительная самостоятельная работа, 4 работы на повторение, 3 математических диктанта и 4 контрольные работы. Самостоятельные работы обозначены буквой С с соответствующим номером, дополнительная самостоятельная работа — буквами ДС, математические диктанты — буквами МД, а контрольные работы — буквой К.

Основная цель самостоятельных работ — помочь учителю организовать деятельность учащихся по решению задач с учетом их индивидуальных особенностей и уровня подготовки. Кроме того, самостоятельные работы могут использоваться для текущего контроля умений и навыков школьников.

Самостоятельные работы даны в восьми вариантах. В первом и втором вариантах каждой работы предлагаются задания, для успешного решения которых учащиеся должны применять знания на уровне минимальных требований.

Третий и четвертый варианты состоят из задач среднего уровня сложности. Решение этих задач предусматривает умение распознавать понятия в стандартных ситуациях, применение знаний в стандартных условиях или при небольших отклонениях от них. Задачи третьего и четвертого вариантов по сложности примерно соответствуют большинству основных задач учебника.

Пятый и шестой варианты предназначены для наиболее подготовленных учащихся. При решении задач этих вариантов требуется умение применять знания в усложненных ситуациях, иметь достаточно высокий уровень развития вычислительных навыков и навыков проведения тождественных преобразований. По сложности эти задачи примерно соответствуют наиболее трудным из основных и дополнительных задач учебника.

Седьмой и восьмой варианты состоят из задач, при решении которых требуется творческое применение знаний. Здесь приходится анализировать сложные геометрические ситуации, самостоятельно открывать новые факты, устанавливать отношения между ними. Задачи из седьмого и восьмого вариантов могут быть даны отдельным учащимся после выполнения ими основной работы наравне со всеми учащимися класса в оставшееся время или использоваться в качестве необязательных заданий для домашней работы, а также на факультативных занятиях либо занятиях математического кружка. Учителю не следует обязательно выполнять с учащимися все задания каждой из работ. Надеемся, что представленные в пособии работы позволят учителю на любом уроке отобрать необходимые задания в зависимости от цели урока, наличия учебного времени, уровня подготовки учащихся.

Работы на повторение составлены в четырех вариантах примерно одинаковой степени сложности. Они позволяют учителю комплексно повторить темы 10—11 классов. Каждая работа состоит из нескольких небольших задач или вопросов различной степени сложности. Это дает возможность каждому ученику проверить свои силы по отдельным вопросам курса геометрии и лучше подготовиться к выпускному экзамену.

Математические диктанты предназначаются для систематизации теоретических знаний учащихся и могут предшествовать контрольной работе. Диктант составлен из небольших задач по прямому применению теории. При проведении диктанта ученик должен в течение нескольких минут ответить на вопрос или решить задачу, предложенную учителем. Необходимое для ответа время регулирует учитель в зависимости от сложности вопроса и подготовленности класса. На такую работу можно отвести 30—35 мин, после чего учитель вместе с классом проверяет ответы учащихся, анализирует допущенные ошибки. Он сам решит, какие задачи дать в виде текста, а какие — с использованием чертежа. Учитель также по своему усмотрению может предлагать не все вопросы диктанта, а только их часть. Задания математических диктантов могут быть использованы как набор дополнительных вопросов на экзамене по геометрии.

Контрольные работы составлены в четырех вариантах. Они предназначены для проведения итоговых проверок знаний по каждой из трех тем учебника и по всему курсу геометрии. Сложность всех вариантов работ примерно одинакова. В каждом варианте имеются более сложные задачи, отмеченные знаком *. Оценка выставляется ученикам только за основную часть работы, а ученики, решившие дополнительную задачу, могут получить вторую оценку за работу.

В конце пособия даны ответы ко всем самостоятельным работам, работам на повторение и к контрольным работам. К наиболее сложным заданиям приведены указания или решения. Предложенные решения, разумеется, не являются единственно возможными.

Автор

Вариант 1

С—1

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 1), A (2; –2; 0).
   1) Найдите координаты всех остальных вершин куба.
   2) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OM}$ и разложите их по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
2. Даны векторы $\vec{a}\{2; -1; 3\}$, $\vec{b}\{-3; 2; 1\}$ и $\vec{c}\{-10; 6; -4\}$. Будут ли коллинеарными векторы $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$?

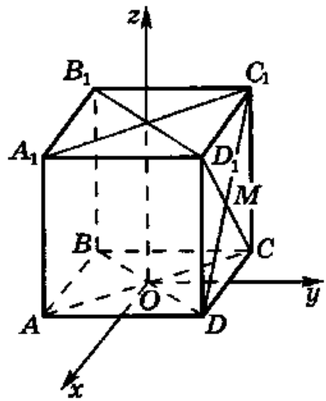


Рис. 1

С—2

1. Даны два вектора $\vec{a}\{-2; 1; -1\}$ и $\vec{b}\{1; -3; 2\}$. Найдите $|\vec{a}+2\vec{b}|$ и $|\vec{a}|+|2\vec{b}|$.
2. В треугольнике ABC BM — медиана, A (–1; 2; 2), B (2; –2; –6), M (1; 1; –1).
   1) Найдите координаты точки C.
   2) Найдите длину стороны BC.
   3) Разложите вектор $\overrightarrow{BC}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

С—3

1. Ребра правильного тетраэдра $DABC$ равны a, K — середина BC. Найдите:
   1) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AK}$;
   2) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — центр грани DD_1C_1C. Какой угол, острый, прямой или тупой, между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BD_1}$?

С—4

1. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 135°$. Найдите угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$.
2. В тетраэдре $DABC$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$, $\angle DAC = \angle DAB$. Используя векторы, докажите, что $AD \perp BC$.

С—5

1. Найдите координаты точек, в которые переходит точка A (100; 200; 1) при:
   а) центральной симметрии относительно начала координат;
   б) зеркальной симметрии относительно плоскости xOy.
2. Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

С—6

1. Докажите, что при движении прямая, перпендикулярная плоскости, отображается на прямую, перпендикулярную плоскости.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая перпендикулярна этой плоскости.

С—7

1. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое с площадью, равной S. Угол между плоскостями сечений равен 30°. Найдите площадь второго сечения.
2. В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Найдите площадь его поверхности, если сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$, а высота 3.

С—8

1. В конусе через его вершину проведена плоскость, пересекающая основание по хорде длиной a, стягивающей дугу в 90°. Наибольший угол между образующими конуса равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Длины окружностей оснований усеченного конуса равны 4π и 10π. Высота конуса равна 4. Найдите площадь поверхности усеченного конуса.

С—9

1. Прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 и 4, вращается вокруг прямой, содержащей гипотенузу. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в пирамиду конуса.

С—10

1. Точка A $(0; \sqrt{2}; \sqrt{5})$ лежит на сфере с центром O $(3; 0; 0)$.
   а) Напишите уравнение сферы.
   б) Принадлежат ли этой сфере точки с координатами $(5; 0; 2\sqrt{3})$; $(4; -1; 0)$?
2. Вершины прямоугольного треугольника с катетами 15 и $\sqrt{351}$ лежат на сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 5.

С—11

1. Линия пересечения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на 8, имеет длину 12π. Найдите площадь поверхности сферы.
2. Плоскость пересекает шар. Диаметр, проведенный в одну из точек линии пересечения, составляет с плоскостью угол в 45°. Найдите площадь сечения, если диаметр шара равен $4\sqrt{3}$.

С—12

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 3, а боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.
2. В правильную четырехугольную призму вписана сфера. Найдите отношение площади полной поверхности призмы к площади сферы.

С—13

1. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как $2:3:4$. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{29}$. Найдите его объем.
2. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с углом 30°. Расстояние от бокового ребра, проходящего через вершину прямого угла, до противолежащей боковой грани равно боковому ребру и равно 6. Найдите объем призмы.

С—14

1. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 10, 10 и 12. Через бóльшую сторону нижнего основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найдите объем призмы.
2. Сечение цилиндра, параллельное его оси, отсекает от окружности основания дугу в 120°. Радиус основания цилиндра равен R, а угол между диагональю сечения и осью цилиндра равен 30°. Найдите объем цилиндра.

С—15

1. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник. Одна из боковых граней является ромбом с диагоналями, равными 6 и 8. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60°. Найдите объем призмы.
2. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 10. Расстояния между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равны 5 и 12, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 13. Найдите объем параллелепипеда.

С—16

1. В правильной треугольной пирамиде высота основания равна h, боковые ребра наклонены к основанию под углом α. Найдите объем пирамиды.
2. Основанием пирамиды $MABCD$ служит ромб со стороной a и острым углом A, равным α. Боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания, а грани MAD и MDC наклонены к нему под углом β. Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Через вершину конуса проведена плоскость под углом $60°$ к плоскости основания, пересекающая основание по хорде, стягивающей дугу в $60°$. Высота конуса равна $4\sqrt{3}$. Найдите объем конуса.
2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Найдите отношение объемов конуса и пирамиды.

С—18

1. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны $6\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. Площадь диагонального сечения равна 90. Найдите объем пирамиды.
2. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как $1 : 3$. Образующая конуса равна 4 и составляет с плоскостью основания угол в $60°$. Найдите объем конуса.

С—19

1. Площадь поверхности полушара равна 48π. Найдите его объем.
2. В конус, осевое сечение которого правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение их объемов.

ДС

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M\ (2;\ -1;\ 3)$ и параллельной плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$.
2. Найдите угол между плоскостями $2x + y - z + 1 = 0$ и $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

Вариант 2

С—1

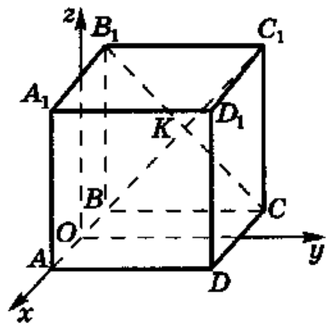


Рис. 2

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 2), $C\ (-2;\ 4;\ 0)$.
   1) Найдите координаты всех остальных вершин куба.
   2) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OK}$ и разложите их по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
2. Даны векторы $\vec{a}\ \{-1;\ 3;\ -2\}$, $\vec{b}\ \{2;\ -1;\ 3\}$ и $\vec{p}\ \{-3;\ -1;\ -4\}$. Будут ли коллинеарными векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{p}$?

С—2

1. Даны два вектора $\vec{m}\ \{-2;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{n}\ \{1;\ 3;\ 2\}$. Найдите $|2\vec{m} - \vec{n}|$ и $|2\vec{m}| - |\vec{n}|$.
2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $A\ (1;\ 3;\ -1)$, $B\ (-2;\ 1;\ 0)$, $O\ (0;\ 1{,}5;\ 0)$.
   1) Найдите координаты вершин C и D.
   2) Найдите длину стороны BC.
   3) Разложите вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

С—3

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ все ребра равны a. Найдите:
   1) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC}$;
   2) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{DB}$.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — центр грани AA_1B_1B. Какой угол, острый, прямой или тупой, между векторами $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{KD}$?

С—4

1. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 120°$. Найдите угол между векторами $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$.
2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб $ABCD$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB$. Используя векторы, докажите, что $BD \perp AA_1$.

С—5

1. Найдите координаты точек, в которые переходит точка B (0,01; 0,02; –1) при:
   а) осевой симметрии относительно оси Oz;
   б) параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ {0,09; 0,08; 1}.
2. Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

С—6

1. Докажите, что при движении плоскость, перпендикулярная прямой, отображается на плоскость, перпендикулярную прямой.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна прямой, то и другая плоскость перпендикулярна этой прямой.

С—7

1. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое. Площадь меньшего из сечений равна Q. Угол между плоскостями сечений равен 60°. Найдите площадь осевого сечения.
2. Вокруг правильной треугольной призмы описан цилиндр. Найдите площадь поверхности цилиндра, если высота призмы равна 4, а высота основания призмы 6.

С—8

1. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна m. Угол между образующими в сечении прямой, а наибольший угол между образующими конуса равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Найдите радиусы основания усеченного конуса, если его боковая поверхность равна 208π, образующая 13, а высота 5.

С—9

1. Равнобедренный треугольник, у которого основание равно $4\sqrt{3}$, а угол при вершине $120°$, вращается вокруг прямой, содержащей основание. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. Вокруг правильной треугольной пирамиды описан конус. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если сторона основания пирамиды равна a, а боковые ребра наклонены к основанию под углом $30°$.

С—10

1. Центр сферы имеет координаты $(0; 0; 4)$. Сфера проходит через точку $(2\sqrt{2}; 0; 5)$.
   1) Напишите уравнение сферы.
   2) Принадлежат ли сфере точки с координатами $(3; 1; 5)$, $(0; \sqrt{5}; 6)$?
2. Все стороны квадрата касаются сферы. Диагональ квадрата равна $10\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости квадрата равно 12.

С—11

1. Сечение шара плоскостью, удаленной от его центра на 12, имеет площадь 25π. Определите площадь поверхности шара.
2. Плоскость пересекает сферу. Диаметр сферы, проведенный в одну из точек линии пересечения, имеет длину $4\sqrt{2}$ и составляет с плоскостью угол в $45°$. Найдите длину линии пересечения.

С—12

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 4, а боковые грани наклонены к основанию под углом $60°$. Найдите радиус вписанной в эту пирамиду сферы.
2. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 2, а боковое ребро $2\sqrt{2}$. Найдите площадь описанной около призмы сферы.

С—13

1. Стороны оснований и диагональ прямоугольного параллелепипеда относятся как 1 : 2 : 3. Длина бокового ребра равна 4. Найдите объем параллелепипеда.
2. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Диагональ большей боковой грани равна 12 и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем призмы.

С—14

1. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, у которого $AB = BC = 10$, $\angle ABC = 30°$. Через ребро AA_1 проведена плоскость, перпендикулярная к грани CC_1B_1B. Диагональ сечения составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем призмы.
2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отстоит от нее на расстояние, равное 15. Диагональ получившегося сечения равна 20, а радиус основания цилиндра 17. Найдите объем цилиндра.

С—15

1. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб, одна из диагоналей которого равна 6. Диагональ одной из боковых граней равна $5\sqrt{3}$ и перпендикулярна к плоскости основания. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.
2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно 10, расстояния от ребра AA_1 до ребер CC_1 и BB_1 равны 13, а расстояние от AA_1 до противолежащей боковой грани 5. Найдите объем призмы.

С—16

1. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна d. Боковые грани наклонены к основанию под углом α. Найдите объем пирамиды.
2. Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$. Ребро BD перпендикулярно к плоскости основания, а грань ADC составляет с ним угол β. Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая окружность основания по хорде, равной $6\sqrt{3}$ и стягивающей дугу в 120°. Плоскость составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем конуса.
2. Вокруг правильной четырехугольной пирамиды описан конус. Найдите отношение объемов конуса и пирамиды.

С—18

1. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны $8\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$. Площадь сечения, проходящего через боковое ребро пирамиды и середину противоположной стороны основания, равна 54. Найдите объем пирамиды.
2. Высота усеченного конуса равна 5, а диагональ осевого сечения 13. Радиусы оснований относятся как 1 : 2. Найдите объем конуса.

С—19

1. Объем шара равен $\frac{32\pi}{3}$. Найдите площадь поверхности полушара.
2. Вокруг конуса, у которого осевым сечением служит правильный треугольник, описан шар. Найдите отношение их объемов.

ДС

1. Даны точки $A\,(2;\ m;\ -1)$ и $B\,(1;\ 2;\ m)$ и плоскость $2x - 3y + z - 1 = 0$. При каком значении m эта плоскость параллельна прямой AB?
2. Найдите угол между прямой AB и плоскостью $2x - 2y + z - 3 = 0$, если $A\,(-1;\ 2;\ 1)$ и $B\,(2;\ -1;\ -2)$.

Вариант 3

С—1

1. Тетраэдр $DABC$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 3), $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$, $AB = 10$, $DB \perp ABC$, плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол в $60°$.

   1) Найдите координаты вершин тетраэдра.

   2) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{CM}$, где M — точка пересечения медиан треугольника ADB, и разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

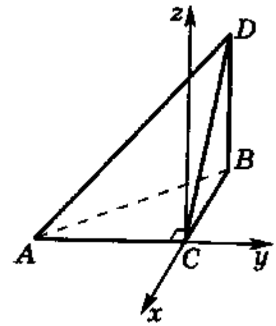


Рис. 3

2. В пространстве заданы четыре точки A, B, C и O, причем $\overrightarrow{OA}\{1; -1; 2\}$, $\overrightarrow{OB}\{3; -2; 4\}$ и $\overrightarrow{OC}\{5; -3; 6\}$. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой?

С—2

1. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AC = CB)$, $A(1; -2; 1)$, $B(3; 2; -3)$. Вершина C лежит на оси ординат. Найдите площадь треугольника ABC.
2. Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}\{-2; 2; 1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 12$.

С—3

1. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны a, $\angle BAD = 60°$. Найдите:

   1) $\overrightarrow{C_1D} \cdot \overrightarrow{AC}$;

   2) $\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Точки $A(1; 1; 5)$, $B(4; 7; 5)$, $C(8; 5; 5)$, $D(5; -1; 5)$ являются вершинами прямоугольника $ABCD$. Найдите больший угол между диагоналями прямоугольника.

С—4

1. В тетраэдре $BACD$ $\angle BDC = \angle BDA = \angle DCA = \angle 90°$, $BC = 3$, $AC = 4$. Найдите сумму $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC, $AC = CB = a$, $\angle ACB = 120°$, $AA_1 = a$, E и F — середины соответственно ребер CA и BB_1. Найдите:
   1) длину EF;
   2) угол между прямыми EF и AA_1.

С—5

1. а) Докажите, что точки A (1; 2; 3) и B (−1; −2; − 3) симметричны относительно начала координат.
   б) Докажите, что точки B (3; −4; 5) и C (3; 4; 5) симметричны относительно плоскости Oxz.
2. Докажите, что при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

С—6

1. Докажите, что прямая, содержащая высоту правильной четырехугольной пирамиды, является ее осью симметрии.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что любое сечение правильной четырехугольной пирамиды, содержащее ее высоту, является равнобедренным треугольником.

С—7

1. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра составляет со стороной основания развертки угол φ. Найдите угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания.
2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10, боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. В эту пирамиду вписан цилиндр, одно основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания равен 2.

С—8

1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен $120°$. Площадь боковой поверхности равна 12π. Найдите площадь осевого сечения конуса.
2. Образующая усеченного конуса равна L и составляет с плоскостью основания угол α. Диагональ его осевого сечения перпендикулярна образующей. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

С—9

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания) $\angle BAD = 90°$, $BC = AB = a$, $AD = 2a$. Найдите площадь поверхности тела, образованного при вращении этой трапеции вокруг прямой, содержащей основание трапеции AD.
2. В основании пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AC = AB = a$, $\angle BAC = \alpha$. Вокруг пирамиды описан конус. Найдите площадь его боковой поверхности, если $\angle DAC = \beta$.

С—10

1. Составьте уравнение сферы, радиус которой равен 2, если известно, что центр сферы лежит в плоскости xOz, а сама сфера проходит через начало координат и точку A (1; 1; 0).
2. Сторона ромба равна a, острый угол в ромбе α. Все стороны ромба касаются шара, площадь большего круга которого равна $\frac{\pi a^2}{8}$. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

С—11

1. Сечения шара двумя параллельными плоскостями, между которыми лежит центр шара, имеют площади 144π и 25π. Найдите площадь поверхности шара, если расстояние между параллельными плоскостями равно 17.
2. Через точку, не лежащую на сфере, проведены две плоскости, касающиеся сферы. Найдите расстояние от центра сферы до линии пересечения плоскостей, если угол между плоскостями равен $60°$, а площадь сферы 32π.

С—12

1. В основании пирамиды лежит треугольник, одна из сторон которого равна 4, а противолежащий ей угол равен 30°. Боковые ребра пирамиды равны 5. Найдите расстояние от центра описанного около пирамиды шара до плоскости основания.
2. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с острым углом α. В этот параллелепипед вписан шар. Найдите угол между большей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

С—13

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна d и составляет с боковой гранью угол 30°. Найдите его объем.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $AC = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\angle AB_1C = 30°$. Найдите объем призмы.

С—14

1. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого равны 6 и 8. Плоскость сечения, проходящего через два противоположных ребра верхнего и нижнего оснований, составляет с основанием угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.
2. Радиус основания конуса равен 4, а его высота 10. В этот конус вписан цилиндр так, что его верхнее основание касается боковой поверхности конуса, а нижнее лежит в плоскости его основания. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите объем цилиндра.

С—15

1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC, $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60°$. Сторона основания равна a, а боковое ребро b. Найдите объем призмы.
2. В наклонном параллелепипеде боковое ребро наклонено к основанию под углом 60°. Высота параллелепипеда равна $5\sqrt{3}$. Площади двух смежных боковых граней равны 40 и 60. Угол между ними равен 45°. Найдите объем параллелепипеда.

С—16

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, а плоский угол при вершине равен α. Найдите объем пирамиды.
2. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $\sqrt{5}, \sqrt{5}$ и 4. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120°. Площадь боковой поверхности конуса равна 3π. Найдите объем конуса.
2. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна $10\sqrt{3}$. Расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно $\frac{30}{13}$. Найдите объем конуса.

С—18

1. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны основания равны a и b ($a > b$). Боковое ребро равно $a - b$. Найдите объем пирамиды.
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину C и перпендикулярной AC. Найдите объем тела вращения.

С—19

1. Шар, радиус которого равен 5, касается плоскости. Через точку касания проведена плоскость, пересекающая шар под углом $\arccos\frac{3}{5}$ к касательной плоскости. Найдите объем меньшей части шара, отсеченной этой плоскостью.
2. Образующая конуса равна 10, а площадь его боковой поверхности 60π. Найдите объем вписанного в конус шара.

ДС

1. Даны шар, ограниченный сферой $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 1$, и плоскость $2x - y + 2z - 1 = 0$. Пересекает ли эта плоскость шар? Если да, то найдите площадь сечения.
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A\ (1; 0; -2)$ и $B\ (0; 3; 1)$ и параллельной оси Oz.

Вариант 4

С—1

1. Тетраэдр $DABC$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 4), $\angle ACD = 90°$, $AB = 8$, $\angle BAC = 60°$, $DB \perp ABC$, плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол $60°$.

   1) Найдите координаты вершин тетраэдра.

   2) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AK}$, где K — точка пересечения медиан грани DBC, и разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

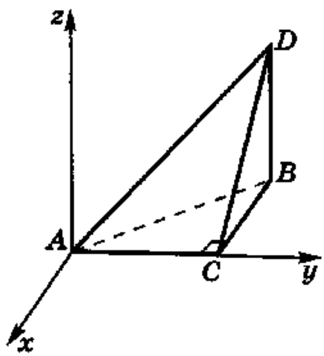


Рис. 4

2. В пространстве даны три точки A, B и C, причем $\overrightarrow{AB}\{2; 3; -1\}$ и $\overrightarrow{AC}\{-4; m; n\}$. При каких m и n эти точки лежат на одной прямой?

С—2

1. В треугольнике ABC $BC = AC\sqrt{3}$, $A(1; -1; 1)$, $B(-1; -1; 3)$. Вершина C лежит на отрицательной полуоси Oz. Найдите длину медианы CM.
2. Вектор $\vec{m}$ противоположно направлен вектору $\vec{p}\{-1; 2; 1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $|\vec{m}| = 3\sqrt{6}$.

С—3

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны a, P — середина A_1B_1. Найдите:

   1) $\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{B_1C}$;

   2) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC_1}$.
2. Точки $A(14; -8; -1)$, $B(7; 3; -1)$, $C(-6; 4; -1)$, $D(1; -7; -1)$ являются вершинами ромба $ABCD$. Найдите острый угол ромба.

С—4

1. В пирамиде $PHKM$ ребро PM является высотой, $\angle PKH = 90°$. Найдите сумму $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH}$, если $MK = 6$, $KH = 8$.
2. В тетраэдре $MABC$ $MC \perp ACB$, $\angle ACB = 135°$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = MC = a$, E и F — середины соответственно ребер CA и BM. Найдите:
   1) длину EF;
   2) угол между прямыми EF и CM.

С—5

1. а) Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ точка A (1; 2; 3) переходит в точку B (4; 5; 6). Найдите координаты $\vec{p}$.
   б) Докажите, что точки A (5; 6; 7) и B (−5; 6; −7) симметричны относительно оси Oy.
2. Докажите, что при движении прямая и плоскость, составляющие угол φ, отображаются на прямую и плоскость, составляющие угол φ.

С—6

1. Докажите, что прямая, содержащая точки пересечения диагоналей противоположных граней прямоугольного параллелепипеда, является его осью симметрии.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что любое сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, содержащей точки пересечения диагоналей противоположных граней, является прямоугольником.

С—7

1. Угол между диагоналями осевого сечения цилиндра и плоскостью его основания равен α. Найдите угол между диагональю развертки его боковой поверхности и стороной основания развертки.
2. В правильную треугольную пирамиду вписан цилиндр, нижнее основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{3}$, а высота цилиндра 2. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания угол в 45°.

С—8

1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен $240°$. Высота конуса $5\sqrt{5}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Образующая усеченного конуса составляет с плоскостью нижнего основания угол φ. Диагональ его осевого сечения перпендикулярна образующей конуса. Сумма длин окружностей оснований равна $2\pi m$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

С—9

1. Диагонали ромба равны 6 и 8. Этот ромб вращается вокруг прямой, содержащей одну из его сторон. Найдите площадь поверхности полученного тела.
2. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a, а угол при основании равен α. Боковые грани наклонены к основанию под углом φ. Найдите площадь боковой поверхности вписанного в пирамиду конуса.

С—10

1. Составьте уравнение сферы с радиусом, равным 3, если известно, что центр сферы лежит на оси Oz и сфера проходит через точку $K\ (-2;\ -2;\ 1)$.
2. Точки A, B и C лежат на поверхности шара. Хорды AB и BC равны a, угол между ними α. На каком расстоянии от центра шара находится плоскость ABC, если площадь большего круга шара равна $\frac{\pi a^2}{2}$?

С—11

1. Сечения сферы двумя параллельными плоскостями имеют длины 10π и 24π. Найдите площадь сферы, если расстояние между плоскостями равно 7 и центры сечений лежат на одном радиусе.
2. Через точку на поверхности шара проведены две плоскости, пересекающие его. Обе плоскости удалены от центра сферы на расстояние $2\sqrt{3}$, угол между ними равен $60°$. Найдите площади получившихся сечений.

С—12

1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4. Вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на расстояние, равное 3. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.
2. В основании прямой призмы лежит треугольник со стороной, равной 5. Угол, лежащий против этой стороны, равен 150°. Высота призмы равна 24. Найдите площадь описанной около призмы сферы.

С—13

1. Основанием нрямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной a. Диагональ параллелепипеда составляет с боковой гранью угол в 30°. Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $AC = 5$. Плоскость AB_1C составляет с плоскостью основания угол в 45°. Расстояние от вершины B до этой плоскости равно $2\sqrt{2}$. Найдите объем призмы.

С—14

1. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит параллелограмм $ABCD$, $BD = 6$, $\angle ABD = 90°$, $\angle BDA = 30°$. Плоскость сечения, проходящая через бóльшие два ребра оснований, составляет с основанием угол в 30°. Найдите объем параллелепипеда.
2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8, а ее высота 16. В эту пирамиду вписан цилиндр так, что окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости ее основания. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите объем цилиндра.

С—15

1. Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами, равными a и b. Боковое ребро, равное c, составляет с прилежащими сторонами основания угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.
2. В наклонной треугольной призме высота равна $10\sqrt{2}$, а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в 45°. Площади двух граней равны 100 и 200, а угол между ними 120°. Найдите объем призмы.

С—16

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а плоский угол при вершине пирамиды α. Найдите объем пирамиды.
2. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом $30°$. Боковые грани наклонены к основанию под углом $60°$. Высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Длина хорды и радиус развертки боковой поверхности конуса соответственно равны $6\sqrt{3}$ и 6. Найдите объем конуса.
2. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани равно $\sqrt{56}$. Найдите объем конуса.

С—18

1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны m и $2m$, апофема пирамиды равна $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. Найдите объем пирамиды.
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AC = CB = 25$, $AB = 48$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину B и перпендикулярной AB. Найдите объем тела вращения.

С—19

1. Шаровой сегмент и конус вместе составляют шаровой сектор. Высота сегмента равна 1, а объем конуса 12π. Найдите объем шарового сектора.
2. Объем конуса равен 128π, а его высота 6. Найдите объем описанного около конуса шара.

ДС

1. Докажите, что плоскость $x - 2y + 2z - 9 = 0$ является касательной к сфере $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 36$.
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $E(-1; 2; 0)$ и $F(1; 0; -2)$ и параллельной оси Ox.

Вариант 5

С—1

1. Тетраэдр $DABC$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 5), $AB = AC = 25$, $BC = 30$, $BO = OC$. Грань ADC составляет с плоскостью основания угол в 45°.

   1) Найдите координаты вершин тетраэдра.

   2) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{OK}$, где K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на грань ACD, и разложите вектор $\overrightarrow{OK}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

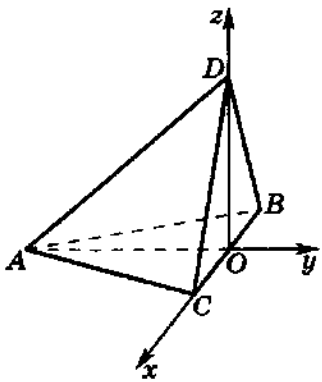


Рис. 5

2. При каких значениях m векторы $\vec{a}\{2; -1; 3\}$, $\vec{b}\{1; 3; -2\}$ и $\vec{c}\{m; 2; 1\}$ компланарны?

С—2

1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро 4, E — середина CD и K — середина C_1C; DK пересекает D_1C в точке P. Найдите расстояние между серединой M отрезка B_1E и точкой P.
2. Прямая AB задана двумя точками $A(-1; 2; 1)$ и $B(2; 1; -1)$. Найдите координаты точки M, лежащей на этой прямой, если $AM = 3\sqrt{14}$.

С—3

1. Вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{i}$ и $\vec{k}$ соответственно углы 120° и 135°. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{j}$.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — центр грани AA_1B_1B, K — середина AD. Найдите площадь треугольника MC_1K, если ребро куба равно 1.

С—4

1. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC, $BD \perp AC$, $BD = AC = 4$, $BB_1 = 2$. Через середину диагонали B_1C боковой грани перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите угол между прямой AB_1 и этой плоскостью.
2. В тетраэдре $ABDC$ $BD = BC = BA$, $\angle ABD = \angle ABC = 60°$, $\angle CBD = 90°$. Используя векторы, докажите, что плоскости DAC и DBC перпендикулярны.

С—5

1. Прямая a содержит биссектрису угла, образованного координатными осями Ox и Oy. Найдите координаты точки A_1, в которую переходит точка A (10; 20; 0) при осевой симметрии относительно прямой a.
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку с координатами $(2x; 2y; 2z)$?

С—6

1. Докажите, что прямая, содержащая середины противоположных ребер правильного тетраэдра, является его осью симметрии.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что каждая плоскость, проведенная через середины противоположных ребер правильного тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равные части.

С—7

1. В цилиндр, высота которого равна a, вписан прямоугольник, у которого одна сторона равна a, а другая наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°. Зная, что вершины прямоугольника находятся на окружностях оснований цилиндра, найдите площадь осевого сечения цилиндра.
2. Все ребра правильной треугольной призмы равны a, боковые ребра ее являются осями цилиндрических поверхностей радиуса a. Найдите площадь боковой поверхности тела, ограниченного указанными цилиндрическими поверхностями и плоскостями оснований призмы.

С—8

1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен $270°$. Через вершину конуса проведено сечение наибольшей площади. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.
2. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Площади полных поверхностей частей конуса, которые при этом образовались, относятся как $3 : 11$. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.

С—9

1. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна a, а угол при вершине равен $120°$. Треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину треугольника, которая параллельна биссектрисе угла при основании. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. В правильной пятиугольной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Образующая вписанного в пирамиду конуса равна m. Найдите площадь осевого сечения конуса.

С—10

1. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и на ней точка $A(\sqrt{2}; \sqrt{2}; z)$. Через точки A и $B(-\sqrt{2};\ 2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ проведена прямая. Найдите координаты точек пересечения этой прямой и сферы.
2. Плоскость проходит через точки A (3; 0; 0), B (0; 4; 0) и C (0; 0; 1). Пересекает ли эта плоскость сферу
$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{49}{169}?$$
Если да, то найдите длину линии пересечения.

С—11

1. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 12. Зная, что площади этих сечений 100π и 64π, найдите радиус шара.
2. Конус, осевое сечение которого прямоугольный треугольник, и полушар с радиусом R имеют общее основание. Параллельно основанию полушара проведена плоскость. Найдите расстояние от проведенной плоскости до центра полушара так, чтобы площадь кольца, которое образовалось при пересечении полушара и конуса этой плоскостью, была наибольшей.

С—12

1. В шар радиуса R вписана пирамида, в основании которой лежит квадрат. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол в $30°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Около шара описана правильная треугольная усеченная пирамида, стороны основания которой равны a и b. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

С—13

1. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 8. Через диагональ основания проведена плоскость, параллельная диагонали параллелепипеда. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол в $45°$. Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $AC = BC = a$. Диагональ боковой грани B_1C составляет с плоскостью грани AA_1B_1B угол α. Найдите объем призмы.

С—14

1. Диагонали B_1F и B_1E правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равны соответственно 24 и 25. Найдите объем призмы.
2. Сечение, параллельное оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в $120°$. Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разделила цилиндр.

С—15

1. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник. Все ребра призмы равны между собой. Одно из боковых ребер составляет с прилежащими сторонами основания угол в $45°$. Площадь боковой поверхности призмы равна $4(1+\sqrt{2})$. Найдите объем призмы.
2. В наклонной треугольной призме расстояние от бокового ребра до диагонали противолежащей боковой грани равно 5, а площадь этой грани 40. Найдите объем призмы.

С—16

1. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$. Грань AMB перпендикулярна плоскости основания, а остальные две грани наклонены к нему под углом β. Расстояние от основания высоты до грани BMC равно d. Найдите объем пирамиды.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а угол между смежными боковыми гранями α. Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Два конуса расположены так, что основания их параллельны и вершина каждого из них расположена в центре основания другого. Найдите объем общей части конусов, если образующая одного из них равна a и составляет с высотой угол β, а наибольший угол между образующими другого конуса равен α.
2. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 10 и 20, а боковая сторона равна 10. Объем описанного около пирамиды конуса равен $\frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$. Найдите угол наклона боковых ребер к плоскости основания.

С—18

1. Основаниями треугольной усеченной пирамиды служат правильные треугольники со сторонами 4 и 12. Одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а две другие составляют с ней угол в 60°. Найдите объем пирамиды.
2. Параллелограмм $ABCD$ вращается вокруг прямой, проходящей через вершину A параллельно меньшей диагонали BD. Найдите объем тела вращения, если в данном параллелограмме $\angle A = 60^\circ$, бо́льшая сторона 6, а меньшая диагональ перпендикулярна стороне.

С—19

1. Найдите объем двояковыпуклого стекла, у которого радиусы поверхностей 13 и 20, а расстояние между центрами 21.
2. Объем конуса в $2\frac{1}{4}$ раза больше объема вписанного в него шара. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью основания.

ДС

1. Даны плоскость $x + y - z - 2 = 0$ и точка A_1 (1; 1; 1). Найдите координаты точки A_1, которая симметрична данной точке A относительно указанной плоскости.
2. Плоскость α проходит через точку M (1; 1; −2) и пересекает плоскость xOy по прямой $y - x = 1$. Напишите уравнение этой плоскости.

Вариант 6

С—1

1. Правильная треугольная пирамида $DABC$ помещена в прямоугольную систему координат (рис. 6). Сторона основания равна 2, боковая грань наклонена к основанию под углом в $60°$.

   1) Найдите координаты вершин пирамиды.

   2) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{OK}$, где $OK \perp AD$, и разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

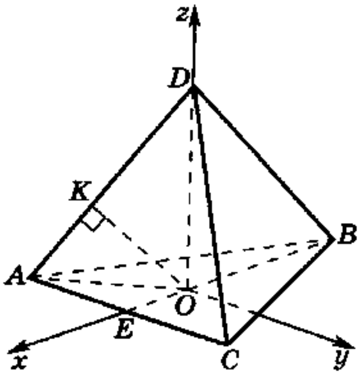


Рис. 6

2. При каких значениях y векторы $\vec{m}\,\{2; -1; 3\}$, $\vec{n}\,\{3; 4; -2\}$ и $\vec{p}\,\{10; y; 2\}$ компланарны?

С—2

1. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $\angle ABC = 90°$, $AB = 6$, $BC = 8$, $BB_1 = 8$. Через вершину A и середину P ребра B_1B проведена плоскость, параллельная BC. Найдите расстояние от центра K описанной вокруг основания окружности до точки M пересечения медиан сечения.
2. Прямая EF задана двумя точками $E\,(-1; 2; 2)$ и $F\,(2; 1; 3)$. Точка P лежит на луче, противоположном лучу EF, $EP = 5\sqrt{11}$. Найдите координаты точки P.

С—3

1. Вектор $\vec{m}$ образует с векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ углы в $60°$. Найдите угол, который образует этот вектор с вектором $\vec{k}$.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина AA_1, а F — центр грани DD_1C_1C. Найдите площадь треугольника EB_1F, если ребро куба равно 1.

С—4

1. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $BD \perp ABC$, $AC = CB = 1$, $BD = 2$. Через середину ребра DC перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите угол между AD и этой плоскостью.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $BC = AA_1 = 1$. Докажите, что диагональ BD_1 не перпендикулярна плоскости A_1C_1D.

С—5

1. Плоскость α содержит ось Ox и биссектрису угла, образованного осями Oz и Oy. Найдите координаты точки, в которую переходит точка B (0; 20; 10) при зеркальной симметрии относительно плоскости α.
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами (x; y; z) переходит в точку с координатами ($x - 5$; $z + 3$; $z - 7$)?

С—6

1. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что каждая плоскость, проведенная через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, делит его на равные части.

С—7

1. Вершины прямоугольника лежат на окружностях оснований цилиндра. Стороны прямоугольника относятся как 1 : 2, причем меньшие стороны лежат в плоскостях оснований. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания $2\sqrt{5}$. Плоскость прямоугольника пересекает ось цилиндра. Найдите площадь прямоугольника.
2. Все ребра правильной треугольной призмы равны a. Боковые ребра ее являются осями цилиндрических поверхностей радиуса $\frac{a}{2}$. Найдите площадь боковой поверхности тела, ограниченного указанными цилиндрическими поверхностями, плоскостями оснований призмы и лежащего внутри призмы.

С—8

1. Центральный угол в развертке боковой поверхности конуса равен 200°. Через вершину конуса проведено сечение наибольшей площади. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.
2. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1 : 2. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основаниям и делящая конус на части, полные поверхности которых относятся как 23 : 39. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

С—9

1. Периметр параллелограмма равен P, а диагональ равна d. Параллелограмм вращается вокруг оси, проходящей через вершину параллелограмма и перпендикулярной этой диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. В правильной пятиугольной пирамиде угол наклона боковой грани к плоскости основания равен φ, образующая описанного около пирамиды конуса равна L. Найдите площадь осевого сечения конуса.

С—10

1. Прямая задана точками $A\ (1;\ 2;\ -1)$ и $B\ (3;\ 0;\ 2)$. Найдите координаты точек пересечения прямой AB со сферой
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\frac{17}{4}.$$
2. Плоскость проходит через точки $A\ (2;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 3)$ и $C\ (0;\ 1;\ 0)$. Выясните взаимное расположение сферы
$$x^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+z^2=R^2$$
и плоскости ABC в зависимости от R.

С—11

1. Площадь большего круга шара равна 50π. Два взаимно перпендикулярных сечения шара имеют общую хорду длиной 6. Найдите расстояние от центра шара до плоскостей сечений, если площадь одного из них 25π.
2. Полушар пересечен плоскостью, параллельной основанию. Получившееся сечение служит верхним основанием цилиндра, нижнее основание которого лежит в плоскости основания полушара. Найдите расстояние от плоскости сечения до центра полушара так, чтобы площадь боковой поверхности цилиндра была наибольшей.

С—12

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Поверхность вписанного в пирамиду шара делит высоту пирамиды пополам. Найдите боковое ребро пирамиды.
2. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная призма. Радиус, проведенный в вершину призмы, образует с плоскостью боковой грани угол в 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

С—13

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 6$, $BC = \frac{12}{\sqrt{5}}$. Через диагональ основания и вершину B_1 проведена плоскость, удаленная от вершины B на расстояние, равное 2,4. Найдите объем параллелепипеда.
2. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $\angle ABC = \beta$. Через диагональ боковой грани B_1C проведена плоскость, перпендикулярная грани AA_1B_1B и составляющая с плоскостью основания угол α. Высота призмы равна h. Найдите объем призмы.

С—14

1. Диагональ C_1E правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна 3, $\angle FC_1E = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Найдите объем призмы.
2. Сечение, параллельное оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 60°. Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разделила цилиндр.

С—15

1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Плоскость грани AA_1C_1C перпендикулярна плоскости основания. Боковое ребро призмы наклонено к основанию под углом 60° и равно катетам основания. Площадь боковой поверхности призмы равна $2(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 2)$. Найдите объем призмы.
2. В наклонной треугольной призме угол между боковым ребром и скрещивающейся с ним стороной основания равен 45°. Длина этой стороны равна 6, а расстояние от бокового ребра до боковой грани, содержащей эту сторону, 4. Длина бокового ребра равна 5. Найдите объем призмы.

С—16

1. Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$. Грань ADC перпендикулярна плоскости основания, а остальные две грани наклонены к нему под углом β. Расстояние от основания высоты до боковой грани BDC равно d. Найдите объем пирамиды.
2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а угол между смежными боковыми гранями α. Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Два конуса расположены так, что основания их параллельны и вершины каждого из них расположены в центре основания другого. Найдите объем общей части этих конусов, если радиусы их оснований равны 4 и 6, а общая высота равна 15.
2. Конус вписан в пирамиду, основанием которой служит прямоугольная трапеция с основаниями, равными 2 и 4. Объем конуса равен $\frac{64\pi}{81}$. Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

С—18

1. Основаниями усеченной пирамиды служат ромбы. Диагонали нижнего основания равны 12 и 16, а верхнего — 8 и 6. Две боковые грани, проходящие через стороны тупых углов ромбов, перпендикулярны плоскости основания, а остальные две из них составляют с основанием угол в 45°. Найдите объем пирамиды.
2. Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из вершин тупого угла ромба на его стороны, равно 20. Найдите объем тела, полученного от вращения ромба вокруг оси, проходящей через вершину острого угла, равного 60°, и перпендикулярной большей диагонали.

С—19

1. Найдите объем выпукло-вогнутой линзы, у которой радиусы поверхностей равны 25 и 29, а расстояние между центрами 6.
2. Отношение объема конуса к объему вписанного в конус шара равно 8 : 3. Найдите величину угла при вершине осевого сечения конуса.

ДС

1. Даны прямая EF, где E (1; −2; 1) и F (2; −1; 3), и плоскость $x - 2y + z - 3 = 0$. Найдите координаты точки P пересечения этой прямой с плоскостью.
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки A (1; −1; 1) и B (2; 1; −1) и перпендикулярной плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$.

Вариант 7

С—1

1. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки F, M и K — середины ребер AA_1, A_1B_1 и BC соответственно, а точка E делит ребро B_1C_1 в отношении $1:5$, считая от вершины B_1, $\angle ABC = 90°$. Боковые ребра призмы и катеты основания равны между собой. Используя метод координат, установите, лежат ли точки F, M, E и K в одной плоскости.
2. Даны три некомпланарных вектора $\vec{p}\{1; -2; 1\}$, $\vec{q}\{2; 0; -1\}$, $\vec{m}\{-1; 1; 2\}$. Разложите вектор $\vec{a}\{1; 2; -2\}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{m}$.

С—2

1. В тетраэдре $DABC$ $DB \perp ABC$, $DB = 4$, $AB = BC$, $BE \perp AC$, $BE = AC = 4$. Точка P равноудалена от всех вершин тетраэдра. Найдите расстояния от точки P до вершин тетраэдра.
2. Решите уравнение
$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = 1.$$

С—3

1. В основании пирамиды $MABCD$, помещенной в прямоугольную систему координат, лежит ромб $ABCD$, $A(-3; 10; -5)$, $C(3; 4; 1)$, $M(5; 8; -3)$, $\angle MAD = \angle MAB$. Найдите высоту пирамиды.
2. Используя скалярное произведение векторов, найдите наибольшее значение выражения
$$\sqrt{\sin^2 x + 0{,}5} + \sqrt{\cos^2 x - 0{,}5} + \sqrt{0{,}5}.$$
При каком значении x оно достигается?

С—4

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $AC = 3$, $BC = 5$. Ребро AM перпендикулярно стороне основания AC, $AM = 4$, $MB = \sqrt{30}$. Найдите высоту пирамиды.
2. В тетраэдре $DABC$ углы ADB, ADC и BDC тупые, $AD = BD = CD$. Докажите, что треугольник ABC остроугольный.

С—5

1. Пусть m_1 и m_2 — пересекающиеся перпендикулярные прямые. Докажите, что композиция симметрий относительно этих прямых есть симметрия относительно прямой, которая перпендикулярна этим прямым.
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку $(-x + 2; -y - 3; -z + 1)$? Если да, то каким образом может быть получена такая точка?

С—6

1. Даны осевые симметрии S_p и S_q пространства; p и q — оси симметрии, которые не совпадают; $S_q \circ S_p$ и $S_p \circ S_q$ — композиции этих симметрий. Докажите, что если $S_q \circ S_p = S_p \circ S_q$, то p и q — пересекающиеся прямые.
2. На данной прямой l найдите точку, симметричную данной точке A относительно точки, лежащей в плоскости α (l пересекает плоскость в точке M).

С—7

1. $ABCD$ и $EFKL$ — два взаимно перпендикулярных осевых сечения цилиндра, причем AD и EL — диаметры одного основания, M — середина образующей AB, $ML \perp AC$. Площадь осевого сечения равна 4. Найдите площадь поверхности цилиндра.
2. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна a, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр (осевое сечение — квадрат), у которого одна образующая принадлежит плоскости основания, а окружности оснований касаются апофем граней AMB и DMC. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

С—8

1. Точки $A(1; 2; -2)$, $B(4; 2; -2)$, $C(3; 4; -2)$ лежат на окружности основания конуса, высота которого равна 3. Конус пересекает плоскость $z = 0$. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, координаты вершины конуса и площадь боковой поверхности конуса.
2. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны. Площадь боковой поверхности усеченного конуса относится к площади боковой поверхности конуса, образующей которого служит диагональ сечения, а радиусом основания — его высота, как $\sqrt{6} : 3$. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

С—9

1. На рисунке 7 изображена 8-звеньевая ломаная линия, все звенья которой равны a, а угол между звеньями α. Найдите площадь поверхности, которая образуется при вращении этой ломаной вокруг оси l.

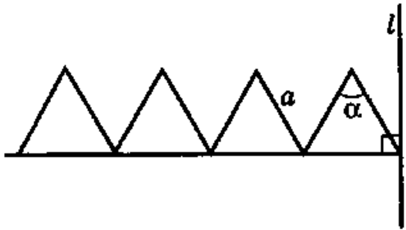


Рис. 7

2. Все ребра правильной треугольной призмы равны a. Четыре вершины призмы лежат в плоскости основания конуса, а две другие — на его боковой поверхности. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите площадь осевого сечения конуса и ее наименьшее возможное значение. При каком значении угла φ это достигается?

С—10

1. Сферы, заданные уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = 0$, пересекаются. Найдите длину линии пересечения этих сфер.
2. Найдите множество точек, расположенных вдвое ближе к точке A (2; 0; 0), чем к точке B (−4; 0; 0).

С—11

1. Из точки поверхности шара проведены три равные хорды под углом α одна к другой. Найдите их длину, если радиус шара равен R.
2. Из одной точки сферы проведены три попарно перпендикулярные хорды длиной a, b и c. Найдите площадь сферы.

С—12

1. Все ребра четырехугольной пирамиды равны a. Высота пирамиды является диаметром шара. Найдите длину линии пересечения поверхностей этих тел.
2. В куб с ребром, равным a, вписан шар. Затем в один из трехгранных углов при вершине куба вписан второй шар, касающийся первого шара. Найдите радиус второго шара.

С—13

1. Стороны AB и BC основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 6 и 8. Через середины сторон AD и CD и вершину B_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $BC = 4$, $BB_1 = 3$. Угол между диагоналями граней AC_1 и CB_1 равен $\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}$. Найдите объем призмы.

С—14

1. Около куба описана призма так, что все вершины куба являются серединами сторон оснований призмы. Основанием призмы служит трапеция, основания которой равны a и b. Найдите объем призмы.
2. Корыто полуцилиндрической формы наполнено до краев жидкостью. Сколько процентов жидкости выльется, если корыто наклонить на 30° так, чтобы образующие цилиндра оставались горизонтальными?

С—15

1. Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Боковое ребро равно b, $\angle A_1AC = 60°$, $\angle A_1AB = 45°$. Найдите объем призмы.
2. В наклонной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит четырехугольник $ABCD$, у которого $AC = 5$, $BD = 4$ и $AC \perp BD$. Диагональное сечение BB_1D_1D — прямоугольник, а площадь сечения AA_1C_1C равна 30. Найдите объем призмы.

С—16

1. В основании треугольной пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной $\sqrt{2}$, $MA = \sqrt{2}$. Боковые грани пирамиды имеют равные площади. Найдите объем пирамиды.
2. В тетраэдре $DABC$ $M \in AB$, причем $AM = \frac{1}{3}AB$, P — середина медианы AF грани ABC, а K — середина медианы AL грани ADB. Через точки M, K и P проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

С—17

1. Через вершину конуса проведено сечение, имеющее наибольшую площадь. Плоскость этого сечения составляет с плоскостью основания угол $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Образующая конуса равна L. Найдите объем меньшей части конуса, отсеченной этой плоскостью.
2. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды равна 10, длина стороны основания 12. Боковая грань пирамиды вписана в окружность основания конуса, образующей которого принадлежит боковое ребро пирамиды. Найдите объем конуса.

С—18

1. Стороны основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$). Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?
2. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), у которого катет $BC = a$ и $\angle A = 60°$, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину A и перпендикулярной биссектрисе угла A. Найдите объем тела вращения.

С—19

1. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной 1. Основание K высоты пирамиды лежит на расстоянии $2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ от центра O этого треугольника, причем луч OK проходит через одну из его вершин. Найдите площадь поверхности вписанного в пирамиду шара, если высота пирамиды равна $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.
2. Полый шар радиуса 9 см, толщина стенок которого 3 см, плывет в воде, причем из воды выступает его часть высотой 6 см. Найдите плотность материала, из которого изготовлен шар.

ДС

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 2, а высота 1. Используя метод координат, найдите угол между AM и плоскостью DMC.
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A\ (1;\ -1;\ 1)$ и $B\ (2;\ 0;\ -1)$, которая была бы параллельна направлению вектора $\vec{m}\ \{3;\ 1;\ -1\}$.

Вариант 8

С—1

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M, P, F и K — середины ребер AD, AA_1, A_1B_1 и C_1C соответственно. Используя метод координат, установите, лежат ли точки M, P, F и K в одной плоскости.
2. Разложите вектор $\vec{m}\ \{1;\ 1;\ 1\}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}\ \{1;\ 1;\ -2\}$, $\vec{b}\ \{1;\ -1;\ 0\}$ и $\vec{c}\ \{0;\ 2;\ 3\}$.

С—2

1. В тетраэдре $DABC$ $AD \perp ABC$, $AD = 2$, $\angle ACB = 90°$, $AC = CB = 4$. Точка M равноудалена от всех вершин тетраэдра. Найдите расстояния от этой точки до вершин тетраэдра.
2. Укажите в пространственной системе координат все решения уравнения
$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}.$$

С—3

1. В тетраэдре $DABC$, помещенном в прямоугольную систему координат, основанием служит равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$. Высоты граней ADC и ADB, проведенные из вершины D, равны между собой. $A\ (1;\ 0;\ -2)$, $D\ (2;\ -1;\ 1)$, $K\ (0;\ 1;\ -1)$ — середина BC. Найдите высоту пирамиды.
2. Используя скалярное произведение векторов, найдите наибольшее значение суммы $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$. При каком x это значение суммы достигается?

С—4

1. В тетраэдре $DABC$ $DB = DC = CB = AC = 3\sqrt{2}$, $AD = 3$, $\angle ACB = 90°$. Найдите высоту пирамиды, опущенную из вершины D.
2. В пирамиде $MEFKP$ плоские углы при вершине M равны α. Вычислите угол β при вершине диагонального сечения EMK.

С—5

1. Докажите, что композиция трех центральных симметрий относительно точек A, B и C (точки не лежат на одной прямой) есть центральная симметрия относительно точки D, являющейся вершиной параллелограмма $ABCD$.
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x;\ y;\ z)$ переходит в точку $(x-1;\ -y-2;\ z+1)$? Если да, то каким образом может быть получена такая точка?

С—6

1. Докажите, что биссектриса линейного угла двугранного угла является осью симметрии двугранного угла.
2. Из вершин параллелепипеда проведены три диагонали его граней. На этих отрезках как на ребрах построен параллелепипед. Докажите, что противоположная вершина данного параллелепипеда служит центром симметрии построенного.

С—7

1. $ABCD$ и $EFKL$ — два взаимно перпендикулярных осевых сечения цилиндра, причем AD и EL — диаметры одного основания, M — середина FA, а N — середина AL, $MN = \sqrt{17}$. Площадь осевого сечения равна 16. Найдите площадь поверхности цилиндра.
2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. В эту пирамиду вписан цилиндр, боковая поверхность которого касается основания пирамиды, а окружности оснований — боковых граней, причем образующая цилиндра расположена на диагонали основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна h.

С—8

1. Точки $A\ (1;\ -1;\ 2)$, $B\ (-2;\ -1;\ 2)$, $C\ (-2;\ 3;\ 2)$ лежат на окружности основания конуса. Точка $M\left(0;\ \frac{5}{3};\ 6\right)$ лежит на его боковой поверхности. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Образующая усеченного конуса равна 1, диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны. Площадь полной поверхности конуса равна $\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}+1)$. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

С—9

1. На рисунке 8 изображено четыре квадрата со стороной, равной a. Найдите площадь поверхности, которая образуется при вращении этой фигуры вокруг оси l.

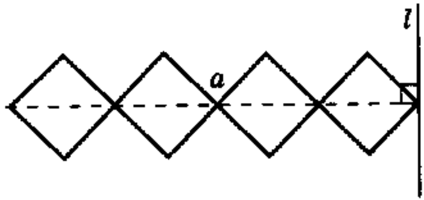


Рис. 8

2. Правильная треугольная призма, все ребра которой равны, вписана в конус, причем три ее вершины лежат на боковой поверхности конуса, а три — в плоскости основания. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите площадь осевого сечения конуса и ее наименьшее значение. При каком значении φ оно достигается?

С—10

1. Даны две сферы. Первая задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = 0$, вторая сфера с центром в точке O_2 (2; 4; 2). Они пересекаются по окружности, длина которой равна $2\pi\sqrt{21}$. Найдите уравнение второй сферы.
2. Найдите множество точек, расположенных вдвое ближе к точке M (0; 2; 0), чем к точке P (0; 4; 0).

С—11

1. Четыре шара радиуса R расположены так, что каждый шар касается трех других. Найдите радиус сферы, которая внутренним образом касается данных шаров.
2. Шар касается всех ребер тетраэдра. Сравните суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра.

С—12

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Высота пирамиды является диаметром шара. Найдите длину линии пересечения поверхности этих тел.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании пирамиды 60°. В пирамиду вписаны три равных шара, каждый из которых касается двух других шаров, плоскости основания и одной из боковых граней пирамиды. Зная, что точки касания шаров с основанием лежат на апофемах основания, найдите радиус шара.

С—13

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 5$, $BC = 12$. Через диагональ параллелепипеда B_1D параллельно диагонали основания AC проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол в $60°$. Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $AC = 3$, $CB = 6$, M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а P — центр симметрии грани CC_1B_1B. Прямая MP составляет с плоскостью грани AA_1C_1C угол $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите объем призмы.

С—14

1. Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна Q. Через боковое ребро проведено сечение, которое разделило призму на части, объемы которых относятся как $1 : 3$. Найдите площадь сечения.
2. Две образующие цилиндра с квадратным осевым сечением лежат на основаниях другого цилиндра, а окружности его оснований касаются боковой поверхности другого цилиндра. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

С—15

1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, у которого $AB = 50$, $AC = 40$ и $\angle BAC = 60°$, $AA_1 = 25$. Расстояние от вершины A_1 до стороны AC равно 7, а до стороны AB равно 20. Найдите объем призмы.
2. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат со стороной, равной a. Боковые ребра тоже равны a, $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90°$. Двугранный угол при ребре AA_1 равен $120°$. Найдите объем параллелепипеда.

С—16

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной $\sqrt{3}$, $MA = 6$. Боковые грани имеют равные площади. Найдите объем пирамиды.
2. В треугольной пирамиде $MABC$ $MA = 4$, $MB = 6$, $MC = 5$. На ребрах MA, MB и MC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 так, что $MA_1 = 1$, $MB_1 = 3$ и $MC_1 = 2$. В каком отношении плоскость $A_1B_1C_1$ разделила объем пирамиды?

С—17

1. Через вершину конуса проведено сечение, имеющее наибольшую площадь. Плоскость этого сечения составляет с плоскостью основания угол arctg 2. Высота конуса равна H. Найдите объем большей части конуса, отсеченной этой плоскостью.
2. Основанием пирамиды служит прямоугольник, стороны которого 12 и 4. Боковые ребра пирамиды равны 10. Боковая грань, проходящая через бóльшую сторону прямоугольника, вписана в окружность основания конуса, а образующая конуса принадлежит высоте противоположной боковой грани, проведенной из вершины пирамиды. Найдите объем конуса.

С—18

1. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как $1:2$. Через центр нижнего основания и среднюю линию одной из боковых граней проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость разделила объем пирамиды?
2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $120°$, а основание равно a. Этот треугольник вращается вокруг оси, проходящей через точку пересечения высот треугольника и параллельной основанию этого треугольника. Найдите объем тела вращения.

С—19

1. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной 1. Основание K высоты пирамиды лежит на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$ от центра O этого треугольника, причем луч OK проходит через середину одной из его сторон. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду, если ее высота равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
2. Полый металлический шар, внешний радиус которого R, плавает, будучи наполовину погруженным в воду. Плотность материала $\rho_ш$. Найдите толщину стенок шара.

ДС

1. Основанием пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, где $AB = 2$, $AD = 1$. Грань AMB — равнобедренный треугольник ($AM = BM$), плоскость которого перпендикулярна плоскости основания. Высота пирамиды $MO = 1$. Используя метод координат, найдите угол между гранями AMD и DMC.
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку M (1; 1; 1) и перпендикулярной линии пересечения плоскостей $2x - y + z - 1 = 0$ и $x + y - 2z - 2 = 0$.

П—1 Вариант 1

В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Две боковые грани ADB и CDB перпендикулярны к плоскости основания. Их общее ребро тоже равно a.

1. Каково взаимное расположение прямых:
   1) AB и CD; 2) BD и AC; 3) PQ и AC, где P и Q — середины ребер AB и CD соответственно?
   Дайте обоснование.
2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно ребрам AC и BD. Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Найдите угол между гранями:
   1) ADB и CDB; 2) DAC и ABC.
4. Чему равен угол между ребром BD и гранью ADC?
5. Найдите угол между AB и DC.
6. Чему равно расстояние между AB и DC?

П—1 Вариант 2

Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $AC = CB = a$. Боковые ребра тоже равны a.

1. Каково взаимное расположение прямых:
   1) AA_1 и BC; 2) A_1C_1 и BC; 3) EF и AC, где $E \in AB_1$ ($AE : EB_1 = 1 : 2$) и $F \in CB_1$ ($CF : FB_1 = 2 : 1$)?
   Дайте обоснование.
2. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через AC и середину B_1C_1. Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Найдите угол:
   1) между плоскостью сечения и плоскостью основания;
   2) между плоскостью сечения и плоскостью грани CC_1B_1B.
4. Чему равен угол между B_1C и плоскостью грани AA_1B_1B?
5. Найдите угол между AB и B_1C.
6. Чему равно расстояние между AB и B_1C?

П—1 Вариант 3

Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a. Грань AMB является правильным треугольником и перпендикулярна плоскости основания.

1. Каково взаимное расположение прямых:
   1) MB и AD; 2) AC и MD; 3) EF и PT, где E, F, T и P — середины ребер MA, MC, CD и AD соответственно? Дайте обоснование.
2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину AD параллельно грани AMB. Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Чему равен угол между плоскостями:
   1) ABC и DMC; 2) AMB и DMC?
4. Чему равен угол между MD и плоскостью AMB?
5. Чему равен угол между MD и AC?
6. Найдите расстояние между BC и MD.

П—1 Вариант 4

В тетраэдре $DABC$ грани ABC и DBC — правильные треугольники со стороной, равной a. Плоскости этих граней перпендикулярны.

1. Каково взаимное расположение прямых:
   1) AC и DB; 2) AD и BC; 3) EF и BC, где E и F — середины ребер AC и BD соответственно? Дайте обоснование.
2. Через вершину A и середину M ребра DC проведите плоскость параллельно BC. Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Найдите угол между плоскостями:
   1) ADC и ABC; 2) ADC и ADB.
4. Найдите угол между медианой грани ADC, проведенной из вершины A, и плоскостью ABC.
5. Найдите угол между: 1) AD и BC; 2) AB и DC.
6. Найдите расстояние между AD и BC.

П—2 Вариант 1

В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб, диагонали которого $AC = 8$ и $BD = 6$. Через диагональ BD и середину ребра CC_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол в $45°$.

1) На какие части эта плоскость делит объем параллелепипеда?

2) Найдите площадь поверхности призмы AB_1BDC_1C.

3) Чему равен угол между диагональю A_1C и плоскостью грани DD_1C_1C?

П—2 Вариант 2

Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $AC = CB = 4$. Боковые ребра наклонены к основанию под углом $60°$.

1) На какие части делит объем пирамиды плоскость CEF, где F — середина BD, а точка E лежит на ребре AB, причем $AE : EB = 1 : 3$?

2) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3) Чему равен двугранный угол, образованный гранями ADC и BDC?

П—2 Вариант 3

Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник со стороной, равной $4\sqrt{3}$. Вершина A_1 проектируется на середину стороны BC, боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в $45°$.

1) Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2) Через сторону основания BC проведена плоскость, перпендикулярная грани CC_1B_1B. В каком отношении она разделила объем призмы?

3) Найдите расстояние от вершины B до боковой грани AA_1C_1C.

П—2 Вариант 4

В основании пирамиды $MABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Высота пирамиды равна 4. Боковые грани пирамиды равнонаклонены к основанию.

1) Через точки A, O и E, где E — середина MB, а O — основание высоты пирамиды MO, проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

2) Найдите площадь поверхности пирамиды.

3) Чему равен угол между MB и плоскостью грани AMC?

П—3 Вариант 1

Наибольший угол между образующими конуса равен $120°$. Площадь осевого сечения равна $16\sqrt{3}$.

1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2) Найдите центральный угол в развертке боковой поверхности конуса.

3) В данный конус вписан другой конус, основание которого параллельно основанию данного конуса и делит его высоту в отношении $1 : 2$, считая от вершины. Вершина вписанного конуса совпадает с центром основания данного. Найдите отношение объемов этих конусов.

4) Найдите площадь поверхности описанного около данного конуса шара.

П—3 **Вариант 2**

В цилиндре, высота которого равна 8, через его образующую проведены две плоскости, угол между которыми 60°. Площади сечений равны $32\sqrt{3}$.

1) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2) Найдите острый угол между диагоналями развертки боковой поверхности цилиндра.
3) Выясните, можно ли в данный цилиндр вписать шар, и если да, то найдите отношение их объемов.
4) Найдите площадь поверхности описанного около этого цилиндра шара.

П—3 **Вариант 3**

В усеченный конус вписан шар, диаметр которого равен $5\sqrt{3}$. Образующие конуса составляют с плоскостью основания угол в 60°.

1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2) Найдите объем конуса.
3) Укажите размеры развертки боковой поверхности конуса (центральный угол развертки, радиусы концентрических окружностей).
4) Какова площадь поверхности описанного около конуса шара?

П—3 **Вариант 4**

Цилиндр, осевое сечение которого квадрат, вписан в конус так, что окружность верхнего основания цилиндра касается боковой поверхности конуса, а нижнее основание лежит на основании конуса. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16π, а образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 45°.

1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2) Какова наибольшая возможная площадь сечения, проведенного через вершину конуса?
3) Найдите отношение объема конуса, отсеченного от данного конуса верхним основанием цилиндра, к объему цилиндра.
4) Найдите объем вписанного в конус шара.

П—4 **Вариант 1**

1. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны a, $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60°$. Используя векторы:
   1) найдите угол между A_1C и медианой AK основания;
   2) докажите, что грань CC_1B_1B — прямоугольник.
2. Призма $ABCA_1B_1C_1$ задана координатами своих вершин A (1; 2; 2), B (–1; –1; 2), C (3; –2; 2), A_1 (1; 2; 5). Найдите угол между прямой AE, где E — середина A_1C_1, и плоскостью, которая перпендикулярна диагонали грани B_1C.

П—4 **Вариант 2**

1. В тетраэдре $MABC$ основанием служит правильный треугольник ABC со стороной a, $AM = 2a$, $\angle MAC = \angle MAB = 45°$. Используя векторы:
   1) докажите, что $AM \perp CB$;
   2) найдите расстояние между серединами ребер AC и BM.
2. Пирамида $MABCD$ задана координатами своих вершин M (–1; 2; 5), A (1; –1; 2), B (–2; 1; 2), C (–1; 3; 2), D (3; 1; 2). Найдите объем пирамиды.

П—4 **Вариант 3**

1. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб $ABCD$ со стороной a и углом A, равным 60°. Боковые ребра тоже равны a. Используя векторы:
   1) найдите угол между AE и BD, где E — центр симметрии грани DD_1C_1C;
   2) докажите, что $A_1C \perp BD$.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, используя метод координат, найдите угол между FE, где F — середина DC, а E — середина B_1C_1, и плоскостью A_1BD.

П—4 **Вариант 4**

1. В правильном тетраэдре $DABC$ ребра равны a, M — точка пересечения медиан грани BDC, а E — середина ребра AD. Используя векторы:
   1) найдите расстояние EM;
   2) докажите, что $PK \perp AD$, где P и K — соответственно середины ребер DC и DB.
2. Основанием пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, где $AB = 2$ и $AD = 1$. Грань AMB — равнобедренный треугольник, плоскость которого перпендикулярна основанию пирамиды. Высота пирамиды равна 1. Используя метод координат, найдите угол между AF и DE, где F — середина MD, а E — середина MC.

МД—1 Вариант 1

1. Дана точка M (1; 3; 2). Найдите координаты точки M_1 — проекции точки M на плоскость Oxz и координаты точки M_2 — проекции точки M на ось Oz.
2. Даны точки E (–1; 2; 3) и F (1; –1; 4). Разложите вектор $\overrightarrow{EF}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
3. Найдите угол между векторами $\vec{j}$ и $\vec{m} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.
4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершины A (1; 2; –4) и C_1 (3; 0; 2). Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.
5. Даны точки A, B и C, причем $\overrightarrow{AB}$ {–2; 4; 3} и $\overrightarrow{AC}$ {4; –8; –6}. Лежат ли эти точки на одной прямой?
6. Дан вектор $\vec{m}$ {1; 2; 2}. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$, сонаправленного с вектором $\vec{m}$.
7. Вектор $\vec{a}$ составляет с положительным направлением оси Ox угол в 135°. Найдите абсциссу вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2$.
8. $DABC$ — правильный тетраэдр. Упростите выражение $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.
9. Дано: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 120°$. Найдите $(\vec{a} + \vec{b})\vec{a}$.
10. В треугольнике ABC A (0; 0; 0), B (1; 2; 1), C (1; –1; 1). Найдите координаты центра описанной около треугольника окружности.

МД—1 Вариант 2

1. Дана точка E (2; –1; 3). Найдите координаты точки E_1 — проекции точки E на плоскость Oyz и координаты точки E_2 — проекции точки E на ось Oy.
2. Даны точки K (2; –1; 3) и M (1; –2; 1). Разложите вектор $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
3. Найдите угол между векторами $\vec{j}$ и $\vec{n} = -2\vec{j} + \vec{k}$.
4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с вершиной B_1 (–1; 3; 2) точка пересечения диагоналей M (2; –1; 1). Найдите координаты вершины D.

5. Даны точки E, F и K, причем $\overrightarrow{EF}$ $\{1; -2; 3\}$ и $\overrightarrow{EK}$ $\{-2; 4; 6\}$. Лежат ли эти точки на одной прямой?
6. Дан вектор $\vec{p}$ $\{-2; -2; 1\}$. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$, противоположно направленного вектору $\vec{p}$.
7. Вектор $\vec{a}$ составляет с положительным направлением оси Oy угол в 135°. Найдите ординату вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.
8. В пирамиде $HPMKE$ все ребра равны. Упростите выражение $(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{MK})(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{MK}) + \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})$.
9. Даны векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$: $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{2}$, $\widehat{\vec{n}\,\vec{m}} = 135°$. Найдите $(\vec{m} - \vec{n})\,\vec{n}$.
10. В треугольнике MFP $M\,(0; 0; 0)$, $F\,(2; -1; 3)$, $P\,(-1; 1; 1)$. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

МД—2

Вариант 1

1. Сечение, параллельное оси цилиндра, отстоит от его оси на расстояние, равное 3. Найдите площадь сечения, если радиус основания цилиндра равен 5, а его высота 10.
2. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Высота призмы равна 4. Площадь боковой поверхности описанного около призмы цилиндра равна ... .
3. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна a. Эта хорда стягивает дугу в 90°. Угол между образующими в сечении равен 60°. Площадь боковой поверхности конуса равна ... .
4. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 10, и противолежащим ей углом в 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Площадь боковой поверхности описанного около пирамиды конуса равна ... .
5. Найдите множество точек, удаленных на a от точки M и на b от точки P.
6. Укажите множество центров всех сфер, которые касаются плоскости в заданной точке.
7. Через точку $A\,(3; 4; 12)$, принадлежащую сфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведена плоскость, перпендикулярная оси Oz. Найдите радиус сечения.

8. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 и 4. В этот конус вписан шар. Площадь боковой поверхности конуса равна ... .
9. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45°. Площадь описанной около пирамиды сферы равна ... .
10. В пирамиду с равнонаклоненными к основанию гранями вписан шар. Центр шара делит высоту в отношении 2 : 1, считая от вершины. Угол наклона боковых граней к основанию равен ... .

МД—2 **Вариант 2**

1. В цилиндре проведено сечение, параллельное его оси. Диагональ сечения равна 16 и составляет угол в 60° с плоскостью основания. Радиус основания цилиндра равен 5. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.
2. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной, равной 4, и углом в 60°. Высота параллелепипеда равна 5. Площадь боковой поверхности вписанного в параллелепипед цилиндра равна ... .
3. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна m. Эта хорда стягивает дугу в 60°. Угол между образующими в сечении прямой. Площадь боковой поверхности конуса равна ... .
4. В правильную треугольную пирамиду вписан конус, сторона основания пирамиды равна 6, а ее высота 1. Площадь боковой поверхности конуса равна ... .
5. Найдите множество точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом.
6. Укажите множество центров всех шаров данного радиуса, которые касаются данной плоскости.
7. Через точку B (3; 4; 12), принадлежащую сфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведена плоскость, перпендикулярная оси Ox. Найдите радиус сечения.
8. Образующая усеченного конуса равна 6. В этот конус вписан шар. Площадь боковой поверхности конуса равна ... .
9. В правильной четырехугольной пирамиде боковые ребра наклонены к основанию под углом 45°. Площадь описанной около пирамиды сферы равна 64π. Сторона основания пирамиды равна ... .

10. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 45°. В эту пирамиду вписан шар. В каком отношении, считая от вершины, центр этого шара делит высоту пирамиды?

МД—3

Вариант 1

1. Основанием правильной четырехугольной призмы служит квадрат, диагональ которого равна d. Через диагональ основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость под углом 45° к нему. Объем призмы равен ... .
2. В наклонной треугольной призме площади двух граней равны 30 и 40. Угол между ними прямой. Боковое ребро равно 10. Найдите объем призмы.
3. Объем наклонной треугольной призмы равен V. Через среднюю линию основания и середину бокового ребра, проходящего через вершину основания, противолежащую средней линии, проведена плоскость. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.
4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4. Боковые грани наклонены к основанию под углом 45°. Объем пирамиды равен ... .
5. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S, а расстояние от центра основания до боковых граней d. Найдите объем пирамиды.
6. Объем пирамиды равен V. Боковое ребро пирамиды разделено на три равные части и через точки деления проведена плоскость, параллельная основанию. Объем усеченной пирамиды, заключенной между параллельными плоскостями, равен ... .
7. Через середину образующей конуса проведена плоскость параллельно плоскости основания. Полученное сечение служит верхним основанием цилиндра, нижнее основание которого лежит на основании конуса. Объем конуса равен 40. Чему равен объем цилиндра?
8. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 45°. Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 10, и противолежащим углом в 30°. Чему равен объем описанного около пирамиды конуса?
9. В правильную треугольную призму, сторона основания которой равна $2\sqrt{3}$, вписан шар. Найдите объем шара.

10. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит этот диаметр на две части, равные 3 и 9. Найдите объем меньшей из этих частей.

МД—3

Вариант 2

1. В правильной треугольной призме сторона основания равна a. Через сторону основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость под углом 45° к основанию. Чему равен объем призмы?
2. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, их площади равны 20 и 30. Боковые ребра равны 5. Найдите объем призмы.
3. В наклонном параллелепипеде через диагональ основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость. Объем параллелепипеда равен V. Чему равен объем отсеченной треугольной пирамиды?
4. Основанием пирамиды служит ромб с углом в 30° и стороной, равной a. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Найдите объем пирамиды.
5. Объем правильной треугольной пирамиды равен V, а площадь ее боковой поверхности S. Найдите расстояние от центра основания до боковых граней.
6. Боковые ребра пирамиды разделены на три части в отношении $1 : 2 : 1$. Через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите отношение объема усеченной пирамиды, заключенной между параллельными плоскостями, к объему отсеченной пирамиды.
7. Через середину образующей конуса проведена плоскость параллельно плоскости основания. Полученное сечение служит верхним основанием цилиндра, нижнее основание которого лежит на основании конуса. Объем цилиндра равен 9. Найдите объем конуса.
8. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Объем описанного около пирамиды конуса равен ... .
9. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной, равной $4\sqrt{3}$, и углом в 60°. В этот параллелепипед вписан шар. Чему равен его объем?
10. В круговом секторе радиус равен 6, а угол 60°. Этот сектор вращается вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих его радиусов. Найдите объем тела вращения.

К—1

Вариант 1

1. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1, M — центр грани DD_1C_1C. Используя метод координат, найдите: 1) угол между прямыми AM и B_1D; 2) расстояние между серединами отрезков AM и B_1D.
3. Даны две точки: A, лежащая на оси ординат, и $B\,(1;\ 0;\ 1)$. Прямая AB составляет с плоскостью Oxz угол в 30°. Найдите координаты точки A.

4*. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного вектору $\vec{b}\,\{6;\ 8;\ -7{,}5\}$ и образующего тупой угол с координатным вектором $\vec{j}$, если $|\vec{a}| = 50$.

К—1

Вариант 2

1. Даны точки $A\,(-1;\ 2;\ 1)$, $B\,(3;\ 0;\ 1)$, $C\,(2;\ -1;\ 0)$ и $D\,(2;\ 1;\ 2)$. Найдите:
   1) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;
   2) расстояние между серединами отрезков AB и CD.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC, $\angle ACB = 120°$, $AC = CB = BB_1$. Используя векторы, найдите угол между прямыми AB и CB_1.
3. Даны две точки: A, лежащая в плоскости xOy, и $B\,(1;\ 1;\ 1)$, причем абсцисса точки A равна ее ординате. Прямая AB составляет с плоскостью zOy угол в 30°. Найдите координаты точки A.

4*. Даны векторы $\vec{a}\,\{7;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{b}\,\{0;\ 0;\ 3\}$. Найдите множество точек M, для каждой из которых выполняются условия $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = 0$ и $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{b} = 0$, где O — начало координат.

К—1 Вариант 3

1. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 135°$. Найдите $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.
2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1, M — середина ребра A_1D_1. Используя метод координат, найдите:
   1) угол между прямыми A_1C и C_1M;
   2) расстояние между серединами отрезков A_1C и C_1M.
3. Даны две точки: A, лежащая на оси аппликат, и $B\,(2;\ 2;\ 0)$. Прямая AB составляет с плоскостью xOy угол в $60°$. Найдите координаты точки A.

4*. Вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}\ \{8;\ -10;\ 13\}$, составляет с положительным направлением оси Oz острый угол, $|\vec{b}| = \sqrt{37}$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$.

К—1 Вариант 4

1. Даны точки $E\,(1;\ -2;\ 2)$, $F\,(3;\ 0;\ 2)$, $K\,(0;\ -2;\ 3)$, $T\,(2;\ 4;\ 1)$. Найдите:
   1) угол между векторами $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{KT}$;
   2) расстояние между серединами отрезков EF и KT.
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны между собой. Используя векторы, найдите угол между прямыми A_1C и AB.
3. Даны две точки: M, лежащая в плоскости xOz, и $P\,(1;\ 2;\ 1)$, причем абсцисса точки M равна ее аппликате. Прямая PM составляет с плоскостью xOy угол в $30°$. Найдите координаты точки M.

4*. Даны векторы $\vec{c}\ \{0;\ -2;\ 0\}$ и $\vec{b}\ \{0;\ 0;\ 5\}$. Найдите множество точек E, для каждой из которых выполнимо условие $\overrightarrow{OE} \cdot \vec{b} = 0$ и $\overrightarrow{OE} \cdot \vec{c} = 0$, где O — начало координат.

К—2 Вариант 1

1. Прямоугольная трапеция с углом в $45°$ вращается вокруг прямой, содержащей большее основание. Найдите площадь поверхности тела вращения, если основания трапеции равны 3 и 5.
2. В шар радиуса R вписан конус, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол φ.
   1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
   2) Если $\varphi = 30°$, то найдите наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через вершину конуса.

3*. Сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$, пересекает оси координат в точках A, B и C; A — точка пересечения с осью Ox, B — с осью Oy, а C — с осью Oz (координаты этих точек положительны). Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью $z = 0$.

К—2 Вариант 2

1. В цилиндре проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу в 90°. Диагональ сечения равна 10 и удалена от оси на расстояние, равное 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. В эту пирамиду вписан шар радиуса R.
   1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
   2) Найдите длину окружности, по которой поверхность шара касается боковых граней пирамиды.

3*. Из точки M $(-7; 3; -4)$ проведена касательная к сфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 27 = 0$. Найдите длину касательной от точки M до точки касания.

К—2 Вариант 3

1. Ромб $ABCD$ со стороной a и углом A, равным 60°, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину C и перпендикулярной диагонали AC. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковые ребра наклонены к основанию под углом α.
   1) Найдите площадь описанной около пирамиды сферы.
   2) Если $\alpha = 30°$, то найдите угол между радиусом сферы, проведенным в одну из вершин основания, и плоскостью основания.

3*. Сфера, заданная уравнением $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$, пересекает ось ординат в точке A $(y < 0)$. Через точку M $(1; 1; 0)$ проведена прямая, параллельная оси Oz и пересекающая сферу в точке B $(z > 0)$. Найдите угол между прямой AB и плоскостью xOy.

К—2 Вариант 4 *(начало)*

1. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде длиной 3, которая стягивает дугу в 120°. Плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол в 45°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60°.
   1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
   2) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, по которой сфера касается боковой поверхности пирамиды.
3*. Через точку M (4; 2; 8) проведена плоскость, которая параллельна оси Oz и составляет с плоскостями xOz и zOy угол в 45°. Найдите длину окружности, по которой сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, пересекает эту плоскость.

К—3 Вариант 1

1. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Расстояние от центра основания до боковой грани равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.
2. В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси, которая отсекает от окружности основания дугу 2α. Диагональ полученного сечения составляет с осью цилиндра угол φ и удалена от нее на расстояние, равное d. Найдите объем цилиндра.
3*. В пирамиду, данную в задаче 1, вписан шар, касающийся боковой поверхности пирамиды по некоторой окружности. Плоскость, которой принадлежит эта окружность, делит шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

К—3 Вариант 2

1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через концы трех ребер, исходящих из вершины C, проведена плоскость на расстоянии $4\sqrt{2}$ от этой вершины, составляющая с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем призмы.
2. В конусе через его вершину под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 2α. Радиус основания конуса равен R. Найдите объем конуса.
3*. В призме, данной в задаче 1, проведена плоскость, перпендикулярная диагонали призмы и делящая ее в отношении 1 : 3. Указанная плоскость делит описанный около призмы шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

К—3 Вариант 3

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом в 60°. Расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно 2. Найдите объем пирамиды.
2. В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси, которая отсекает от окружности основания дугу φ. Диагональ полученного сечения равна $2m$ и удалена от оси цилиндра на расстояние, равное m. Найдите объем цилиндра.

3*. В пирамиду, данную в задаче 1, вписан шар, касающийся боковой поверхности пирамиды по некоторой окружности. Плоскость, которой принадлежит эта окружность, делит шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

К—3 Вариант 4

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону нижнего основания BC и противолежащую вершину A_1 проведена плоскость под углом в 45° к плоскости основания. Расстояние от этой плоскости до вершины A равно 2. Найдите объем призмы.
2. В конусе через его вершину под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α. Высота конуса равна h. Найдите объем конуса.

3*. Вокруг призмы, данной в задаче 1, описан шар. Найдите объем меньшей части шара, которая отсекается от него плоскостью боковой грани.

К—4 Вариант 1

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 6, а боковое ребро 5. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол наклона боковой грани к плоскости основания;
4) скалярное произведение векторов $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})\,\overrightarrow{AM}$;
5) площадь описанной около пирамиды сферы;

6*) угол между BD и плоскостью DMC.

К—4 Вариант 2

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро 5. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})\,\overrightarrow{EA}$, где E — середина BC;
5) объем вписанного в пирамиду шара;
6*) угол между стороной основания и плоскостью боковой грани.

К—4 Вариант 3

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 8 и наклонено к плоскости основания под углом в 60°. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол между противоположными боковыми гранями;
4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})\,\overrightarrow{ME}$, где E — середина DC;
5) объем описанного около пирамиды шара;
6*) угол между боковым ребром AM и плоскостью DMC.

К—4 Вариант 4

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Найдите:

1) площадь боковой поверхности пирамиды;
2) объем пирамиды;
3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB})\,\overrightarrow{OM}$, где O — основание высоты пирамиды;
5) площадь вписанной в пирамиду сферы;
6*) угол между ME, где E — середина BC, и плоскостью AMC.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Самостоятельные работы

С—1

Вар. 1. **1.** 1) $B(-2; -2; 0)$, $D(2; 2; 0)$, $C(-2; 2; 0)$, $A_1(2; -2; 4)$, $B_1(-2; -2; 4)$, $D_1(2; 2; 4)$, $C_1(-2; 2; 4)$.

2) $\overrightarrow{OD}\{2; 2; 0\}$, $\overrightarrow{OC_1}\{-2; 2; 4\}$, $\overrightarrow{OM}\{0; 2; 2\}$, $\overrightarrow{OD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$, $\overrightarrow{OC_1} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OM} = 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Да, будут.

Вар. 2. **1.** 1) $A(2; 0; 0)$, $B(-2; 0; 0)$, $D(2; 4; 0)$, $A_1(2; 0; 4)$, $B_1(-2; 0; 4)$, $C_1(-2; 4; 4)$, $D_1(2; 4; 4)$.

2) $\overrightarrow{OC}\{-2; 4; 0\}$, $\overrightarrow{OB_1}\{-2; 0; 4\}$, $\overrightarrow{OK}\{-2; 2; 2\}$, $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$, $\overrightarrow{OB_1} = -2\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OK} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Да, будут.

Вар. 3. **1.** 1) $C(0; 0; 0)$, $B(-5; 0; 0)$, $A(0; -5\sqrt{3}; 0)$, $D(-5; 0; 5\sqrt{3})$.

2) $\overrightarrow{CM}\left\{-\dfrac{10}{3}; -\dfrac{5\sqrt{3}}{3}; \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right\}$, $\overrightarrow{CM} = -\dfrac{10}{3}\vec{i} - \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\vec{k}$.

2. Да, лежат.

Вар. 4. **1.** 1) $A(0; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $B(-4\sqrt{3}; 4; 0)$, $D(-4\sqrt{3}; 4; 12)$.

2) $\overrightarrow{AK}\left\{-\dfrac{8\sqrt{3}}{3}; 4; 4\right\}$; $\overrightarrow{AK} = -\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

2. $m = -6$, $n = 2$.

Вар. 5. **1.** Из точки O опускаем перпендикуляр OE на AC и точку E соединяем с точкой D. Тогда $\angle DEO = 45°$, $OE = OD = 12$, $D(0; 0; 12)$. В треугольнике DOE опускаем перпендикуляр OK на DE. Легко доказать, что $OK \perp ADC$; $\overrightarrow{OK} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD})$, где K — середина ED ($OE = OD$). Для решения задачи необходимо найти координаты точки E. Строим $EF \perp OC$, из подобия треугольников OFE и AOC находим $EF = \dfrac{36}{5}$ и $OF = \dfrac{48}{5}$. Тогда $E\left(\dfrac{48}{5}; -\dfrac{36}{5}; 0\right)$. Дальнейшее решение очевидно.

Ответ. 1) $A(0; -20; 0)$, $B(-15; 0; 0)$, $C(15; 0; 0)$, $D(0; 0; 12)$.

2) $\overrightarrow{OK}\{4{,}8; -3{,}6; 6\}$, $\overrightarrow{OK} = 4{,}8\vec{i} - 3{,}6\vec{j} + 6\vec{k}$.

2. При $m = 3$. В этом случае $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и векторы компланарны.

Вар. 6. 1. 1) $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1; 0\right)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1; 0\right)$, $B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0; 0\right)$, $D\ (0; 0; 1)$.

2) Так как $OA = \frac{2}{\sqrt{3}}$, а $OD = 1$, то $\frac{AK}{KD} = \frac{AO^2}{DO^2} = \frac{4}{3}$. Тогда $\overrightarrow{OK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OA}$. Дальнейшее решение очевидно.

Ответ. $\overrightarrow{OK}\left\{\frac{3}{7\sqrt{3}}; -\frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right\}$, $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{7\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{4}{7}\vec{k}$.

2. При $y = 6$. Тогда $\vec{p} = 2\vec{m} + 2\vec{n}$ и векторы компланарны.

Вар. 7. 1. Поместим призму в прямоугольную систему координат так, чтобы точка B была началом координат, а оси Ox, Oy и Oz были сонаправлены с лучами BA, BC и BB_1 соответственно. Пусть боковые ребра призмы и катеты основания равны 1. Тогда $F\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, $E\left(0; \frac{1}{6}; 1\right)$ и $K\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$. Необходимо установить, компланарны ли векторы $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{EM}$ и $\overrightarrow{EF}$. Так как $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BM}\left\{\frac{1}{2}; 0; 1\right\}$, $\overrightarrow{BE}\left\{0; \frac{1}{6}; 1\right\}$, то $\overrightarrow{EM}\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}; 0\right\}$. Аналогично получим, что $\overrightarrow{EF}\left\{1; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{2}\right\}$ и $\overrightarrow{EK}\left\{0; \frac{1}{3}; -1\right\}$. Если указанные векторы компланарны, то должны существовать такие x и y, что $\overrightarrow{EK} = x\overrightarrow{EM} + y\overrightarrow{EF}$. Тогда получим систему $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y = \frac{1}{3} \\ 0 - \frac{1}{2}y = -1. \end{cases}$

Она имеет решение $x = -4$ и $y = 2$. Значит, $\overrightarrow{EK} = -4\overrightarrow{EM} + 2\overrightarrow{EF}$. Тем самым доказывается, что указанные точки лежат в одной плоскости.

2. $\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{m}$, $x\vec{p}\ \{x; -2x; x\}$, $y\vec{q}\ \{2y; 0; -y\}$, $z\vec{m}\ \{-z; z; 2z\}$, $\vec{a}\ \{x + 2y - z; -2x + z; x - y + 2z\}$.

Так как разложение по базису единственное, то $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x + z = 2 \\ x - 2y + 2z = -2. \end{cases}$ Отсюда $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

Ответ. $\vec{a} = -\vec{p} + \vec{q} + 0 \cdot \vec{m}$.

Вар. 8. 1. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. Если куб с ребром, равным 1, поместить в прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат было в точке B, а оси Ox, Oy и Oz были сонаправлены с лучами BA, BC и BB_1

соответственно, то можно получить, что $\overrightarrow{PK} = 2\overrightarrow{PF} + 2\overrightarrow{PM}$. Этим доказываем, что указанные точки лежат в одной плоскости.

2. $\vec{m} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7.

С—2

Вар. 1. 1. $\sqrt{34}$; $\sqrt{6} + 2\sqrt{14}$.

2. 1) C (3; 0; −4); 2) $BC = 3$; 3) $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Вар. 2. 1. $\sqrt{42}$; $2\sqrt{6} - \sqrt{14}$.

2. 1) C (−1; 0; 1), D (2; 2; 0); 2) $BC = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Вар. 3. 1. 9. 2. $\vec{a}$ {−8; 8; 4}.

Вар. 4. 1. $\sqrt{10}$. 2. $\vec{m}$ {3; −6; −3}.

Вар. 5. 1. Поместим призму в прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой B, а оси Ox, Oy и Oz были сонаправлены с лучами BA, BC и BB_1 соответственно. При решении учесть, что P — точка пересечения медиан $\triangle DC_1C$ и $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$. Ответ. $\frac{\sqrt{53}}{6}$.

2. $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, так как точка M лежит на прямой AB. Пусть координаты точки M $(x; y; z)$. Тогда $\overrightarrow{AM}$ $\{x + 1; y - 2; z - 1\}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AM}$ $\{3k; -k; -2k\}$, $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{2k^2 + k^2 + 4k^2} = |k|\sqrt{14}$. По условию $|\overrightarrow{AM}| = 3\sqrt{14}$. Тогда $k = \pm 3$. Так как $\begin{cases} x + 1 = 3k \\ y - 2 = -k \\ z - 1 = -2k, \end{cases}$ то

$\begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \\ z = -5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -10 \\ y = 5 \\ z = 7. \end{cases}$ Ответ. M (8; −1; −5) или M (−10; 5; 7).

Вар. 6. 1. $\sqrt{\frac{89}{3}}$.

2. P (−16; 7; −3). Решается аналогично задаче из варианта 5.

Вар. 7. 1. Поместим тетраэдр в прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой E. Пусть ось Ox противоположно направлена лучу EB, ось Oy сонаправлена с лучом EC, а ось Oz сонаправлена с лучом BD. Пусть P $(x; y; z)$. В выбранной системе координат A (0; −2; 0), B (−4; 0; 0), C (0; 2; 0), D (−4; 0; 4). Так как P равноудалена от всех вершин тетраэдра, то

$$\sqrt{x^2 + (y+2)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} =$$
$$= \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + (z-4)^2},$$

откуда $x = -\frac{3}{2}$, $y = 0$ и $z = 2$; $P\left(-\frac{3}{2};\ 0;\ 2\right)$;

$$AP = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4 + 4} = \sqrt{\frac{41}{2}}.$$

2. $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ есть расстояние между точками $M\ (x;\ y;\ z)$ и $A\ (1;\ 0;\ 0)$, а $\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$ — между точками $M\ (x;\ y;\ z)$ и $B\ (0;\ 1;\ 0)$. Так как $AB = \sqrt{2}$, то $MA + MB \geqslant \sqrt{2}$, а по условию $MA + MB = 1$. Следовательно, уравнение не имеет решения.

Вар. 8. 1. 3.

2. Решением уравнения служат координаты всех точек отрезка AB, где $A\ (0;\ 0;\ 1)$ и $B\ (1;\ 0;\ 0)$. Задача решается аналогично задаче из варианта 7.

С—3

Вар. 1. 1. 1) $-\frac{a^2}{2}$; 2) 0. 2. Острый.

Вар. 2. 1. 1) $-a^2$; 2) 0. 2. Тупой.

Вар. 3. 1. 1) $-\frac{3a^2}{2}$; 2) 0. 2. $180° - \arccos\frac{5}{13}$.

Вар. 4. 1. 1) $-\frac{3a^2}{4}$; 2) 0. 2. $\arccos\frac{3}{5}$.

Вар. 5. 1. Пусть вектор $\vec{a}\ \{x;\ y;\ z\}$ составляет с вектором $\vec{i}$ угол α, с вектором $\vec{j}$ угол β, а с вектором $\vec{k}$ угол γ. Имеем

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Тогда $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$

По условию $\alpha = 120°$, $\gamma = 135°$ и, значит,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\beta + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Отсюда $\cos\beta = \pm\frac{1}{2}$. Ответ. 60° или 120°.

2. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. Необходимо куб поместить в прямоугольную систему координат и найти синус одного из углов треугольника.

Вар. 6. 1. 45° или 135°.

2. $\frac{\sqrt{21}}{8}$. См. указания к задачам из варианта 5.

Вар. 7. 1. $2\sqrt{6}$. Необходимо учесть, что вершина M пирамиды проектируется на биссектрису угла BAD, т. е. на AC. Для решения задачи необходимо найти синус угла между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2. Рассмотрим векторы $\vec{a}\,\{\sqrt{\sin^2 x+0{,}5};\ \sqrt{\cos^2 x-0{,}5};\ \sqrt{0{,}5}\}$ и $\vec{b}\,\{1;\ 1;\ 1\}$. Их скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{\sin^2 x+0{,}5}+\sqrt{\cos^2 x-0{,}5}+\sqrt{0{,}5}.$$

С другой стороны,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,$$

где $\varphi=\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$, $|\vec{a}|=\sqrt{\sin^2 x+0{,}5+\cos^2 x-0{,}5+0{,}5}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$;

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{3}\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\varphi.$$

Наибольшее значение скалярного произведения равно $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Таким образом, наибольшее значение выражения $\sqrt{\sin^2 x+0{,}5}+$ $+\sqrt{\cos^2 x-0{,}5}+\sqrt{0{,}5}$ равно $3\sqrt{0{,}5}$. Оно достигается при $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Вар. 8. 1. $2\sqrt{2}$. Необходимо учесть, что вершина D проектируется на биссектрису угла BAC, т. е. на AK. Для решения задачи необходимо найти синус угла между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AK}$.

2. Рассмотрим векторы $\vec{a}\,\{\sqrt{1+x};\ \sqrt{1-x}\}$ и $\vec{b}\,\{1;\ 1\}$. Их скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$.

С другой стороны,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,$$

где $\varphi=\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$, $|\vec{a}|=\sqrt{1+x+1-x}=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\varphi=2\cos\varphi.$$

Наибольшее значение скалярного произведения равно 2. Таким образом, наибольшее значение выражения $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+1$ равно 3. Оно достигается при $x=0$.

С—4

Вар. 1. 1. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}\approx 71°34'$; $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

Вар. 2. 1. $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\approx 79°6'$; $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Вар. 3. 1. Необходимо доказать, что $\angle ACB=90°$, и тогда $AB=5$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=25+0=25.$$

Ответ. 25.

2. Пусть $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ — базисные векторы. Тогда $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$;

$$\overrightarrow{EF}^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{CC_1}^2 - \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CC_1} =$$

$$= \frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{1}{4}a^2 - a^2\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 + 0 = 2a^2.$$

$$EF = a\sqrt{2},\ \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CC_1}}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\overrightarrow{CC_1}|}\right| \frac{a^2}{2a\cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}};\ \varphi = \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 69°18'.$$

Ответ. 1) $a\sqrt{2}$; 2) $\approx 69°18'$.

Вар. 4. 1. 100.

2. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}} \approx 65°54'$. Задача решается аналогично задаче из варианта 3.

Вар. 5. 1. Поместим призму в прямоугольную систему координат. Пусть точка D — начало координат. Положительное направление оси Ox противоположно лучу DB, положительное направление оси Oy сонаправлено с лучом DC, а положительное направление оси Oz совпадает с лучом CC_1. Обозначим искомый угол φ. Имеем $\overrightarrow{CB_1}\{-4; -2; 2\}$; $\overrightarrow{AB_1}\{-4; 2; 2\}$. Тогда

$$\sin\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{CB_1}|\cdot|\overrightarrow{AB_1}|}\right| = \left|\frac{16-4+4}{\sqrt{16+4+4}\cdot\sqrt{16+4+4}}\right| = \frac{2}{3},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{2}{3} \approx 41°49'.$$

2. Пусть $BD = BC = BA = 1$ и пусть E — середина DC.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BD} =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0.$$

Отсюда следует, что $AE \perp BD$. Аналогично можно доказать, что $AE \perp BC$. В таком случае $AE \perp DBC$ и $DAC \perp DBC$.

Вар. 6. 1. $\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 43°59'$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5.

2. Пусть $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ — базисные векторы.

$$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{B_1D_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2 = \\ = 1 - 4 = -3 \neq 0.$$

Следовательно, BD_1 — не перпендикуляр к A_1C_1 и BD_1 — не перпендикуляр плоскости A_1C_1D.

Вар. 7. **1.** Опустим из вершины M перпендикуляр MO на плоскость ABC. По теореме о трех перпендикулярах $OA \perp AC$. Очевидно, что точка O находится вне треугольника ABC. Пусть $\angle MAO = \varphi$.

$$\angle MAO = 180° - \widehat{\overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{MA}}.$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB};$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} =$$

$$= 16 + 9 + 25 + 0 + 2 \cdot 4 \cdot 5\cos(180° - \varphi) + 0 = 50 + 40\cos(180° - \varphi).$$

По условию $MB = \sqrt{30}$. Тогда $50 - 40\cos\varphi = 30$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ и $\varphi = 60°$. Высота пирамиды $MO = MA \cdot \sin 60° = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

2. Пусть $DA = DB = DC = 1$ и пусть $\angle ADC = \alpha$, $\angle ADB = \beta$, $\angle CDB = \gamma$.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = \\ = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA}^2 = \\ = \cos\gamma - \cos\beta - \cos\alpha + 1,\ \cos\beta < 0,\ \cos\alpha < 0.$$

Значит, $-\cos\beta > 0$ и $-\cos\alpha > 0$, $|\cos\gamma| < 1$, а потому $1 + \cos\gamma > 0$. В таком случае $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} > 0$ и $\angle ACB$ острый. Аналогично доказываем, что и все остальные углы острые.

Вар. 8. **1.** $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

2. От вершины M отложим единичные векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, сонаправленные с векторами $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MP}$. Тогда $ABCD$ — квадрат и $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

$$(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0;$$
$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0,$$
$$\cos\alpha - \cos\beta - 1 + \cos\alpha = 0;$$
$$\cos\beta = 2\cos\alpha - 1 \text{ и } \beta = \arccos(2\cos\alpha - 1).$$

Вар. 1. **1.** а) $(-100; -200; -1)$; б) $(100; 200; -1)$.

2. Так как при движении отрезок отображается на равный отрезок, то каждая сторона треугольника отображается на равный ей отрезок, и, следовательно, треугольник отображается на треугольник с соответственно равными сторонами, т. е. на равный треугольник.

Вар. 2. **1.** а) $(-0{,}01; -0{,}02; -1)$; б) $(0{,}1; 0{,}1; 0)$.

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 1.

Вар. 3. **1.** Указание. а) Вычислите координаты середины отрезка AB; б) вычислите координаты середины отрезка BC.

2. Рассмотрим двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с границей a и линейным углом lk, где l и k — лучи, принадлежащие полуплоскостям α и β соответственно. Пусть при движении $a \to a_1$, $\alpha \to \alpha_1$, $\beta \to \beta_1$, $k \to k_1$, $l \to l_1$. Очевидно, что прямая a_1 будет общей границей полуплоскостей α_1 и β_1, в которых будут соответственно лежать лучи l_1 и k_1. Так как при движении углы сохраняются, то углы lk и l_1k_1 равны между собой. Следовательно, при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

Вар. 4. **1.** а) $\{3; 3; 3\}$; б) Указание. Найдите середину отрезка AB.

2. Пусть прямая AB пересекает плоскость α в точке A и образует с ней угол φ. Пусть C — проекция точки B на плоскость α. Проведем в плоскости α через точку C прямую b. Очевидно, что $BC \perp b$. Пусть при движении $\alpha \to \alpha_1$, $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ и $b \to b_1$. Очевидно, что прямая A_1B_1 будет пересекать плоскость α_1, а прямые A_1C_1 и b_1 будут лежать в плоскости α_1. Так как при движении углы сохраняются, то $B_1C_1 \perp b$. Значит, $B_1C_1 \perp A_1C_1$ и $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$. Следовательно, при движении прямая и плоскость, составляющие угол φ, отображаются на прямую и плоскость, составляющие угол φ.

Вар. 5. **1.** Заметим прежде всего, что точка A $(10; 20; 0)$ лежит в плоскости xOy. Пусть при осевой симметрии относительно прямой a точка A отображается на точку B $(x; y; z)$. Тогда середина отрезка AB — точка M имеет координаты $(k; k; 0)$, где $k \neq 0$, так как принадлежит прямой a и не совпадает с началом координат — точкой O. Значит, $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MO}$ и $(10 - k)\,k + (20 - k)\,k = 0$, откуда $k = 15$. Используя формулы координат середины отрезка, получаем $15 = \dfrac{10 + x}{2}$, $15 = \dfrac{20 + y}{2}$ и $0 = \dfrac{0 + z}{2}$, откуда A_1 $(20; 10; 0)$.

2. При данном отображении пространства на себя произвольные точки A $(x_1; y_1; z_1)$ и B $(x_2; y_2; z_2)$ переходят в точки A_1 $(2x_1; 2y_1; 2z_1)$ и B_1 $(2x_2; 2y_2; 2z_2)$. Пользуясь координатной формулой для нахождения расстояния между точками, находим, что $AB \neq A_1B_1$. Это значит, что данное отображение движением не является.

Вар. 6. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

Ответ. 1. (0; 10; 20). 2. Да, является.

Вар. 7. **1.** Введем прямоугольную систему координат, будем рассматривать прямые m_1 и m_2 в качестве осей Ox и Oy. При симметрии относительно оси Ox точка $A\ (x;\ y;\ z) \to B\ (x;\ -y;\ -z)$, а при симметрии относительно оси Oy точка $B\ (x;\ -y;\ -z) \to$ $\to C\ (-x;\ -y;\ z)$. В таком случае точки A и C симметричны относительно оси Oz, которая перпендикулярна к Ox и Oy.

2. Да, будет. Такая точка может быть получена композицией центральной симметрии относительно начала координат и параллельного переноса на вектор $\vec{p}\ \{2;\ -3;\ 1\}$.

Вар. 8. **1.** При симметрии относительно A имеем $M \to M_1$, при симметрии относительно B имеем $M_1 \to M_2$, а при симметрии относительно C имеем $M_2 \to M_3$. Образовался пространственный четырехугольник $MM_1M_2M_3$. Точки M и M_3 будут симметричны относительно точки D — середины MM_3. Точки A, B, C и D — последовательно середины сторон указанного четырехугольника. Тогда легко доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

2. Да, будет. Такая точка может быть получена композицией зеркальной симметрии относительно плоскости xOz и параллельного переноса на вектор $\vec{p}\ \{-1;\ 2;\ 1\}$.

С—6

Вар. 1. **1.** Рассмотрим прямую a, перпендикулярную к некоторой плоскости α, и две пересекающиеся прямые b и c, лежащие в плоскости α. Очевидно, что $a \perp b$ и $a \perp c$. Пусть при движении $a \to a_1$, $b \to b_1$, $c \to c_1$, $\alpha \to \alpha_1$. Легко доказать, что прямые c_1 и b_1 лежат в плоскости α_1, а прямая a_1 пересекает плоскость α_1. Так как при движении углы сохраняются, то $a_1 \perp b_1$ и $a_1 \perp c_1$. Значит, $a_1 \perp \alpha_1$, т. е. при движении прямая, перпендикулярная к плоскости, отображается на прямую, перпендикулярную к плоскости.

2. Очевидно, что если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость α, то и другая пересекает ее. Пусть данные прямые a и b пересекают данную плоскость α в точках A и B соответственно. Значит, при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ имеем $a \to b$, $\alpha \to \alpha_1$. Тогда по доказанному в пункте а) прямая b будет перпендикулярна к плоскости α.

Вар. 2. Указание. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 1.

Вар. 3. **1.** Пусть дана правильная четырехугольная пирамида $EABCD$ с высотой EO. При симметрии относительно прямой EO $E \to E$, $A \to C$, $C \to A$, $B \to D$, $D \to B$. Значит, квадрат $ABCD$ отображается на себя. Следовательно, EO — ось симметрии пирамиды.

2. Пусть H — произвольная точка пирамиды. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью EOH. Очевидно, оно является треугольником. По показанному в пункте 1) при симметрии относительно прямой EO точка H отображается на точку H_1, принадлежащую пирамиде. Но очевидно также, что точка H_1 принадлежит плоскости EOH, т. е. принадлежит сечению. Это означает, что треугольник, полученный в сечении, отображается на себя при симметрии относительно прямой EO, проходящей через одну из его вершин. Значит, этот треугольник равнобедренный.

Вар. 4. Указание. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 3.

Вар. 5. 1. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 3.

2. Проведем плоскость α через прямую c, содержащую середины противоположных ребер правильного тетраэдра. Пусть точка M принадлежит сечению тетраэдра плоскостью α. Тогда по доказанному в задаче 1 при симметрии относительно прямой c точка M отображается на точку M_1, принадлежащую одновременно плоскости α и тетраэдру. Значит, сечение при симметрии относительно прямой отобразится на себя. Возьмем теперь произвольную точку H, принадлежащую одной из двух частей, на которые плоскость α делит тетраэдр. По доказанному в пункте 1) при симметрии относительно прямой c точка H отображается на точку H_1, принадлежащую тетраэдру. По определению симметричных точек отрезок HH_1 пересекает прямую c, а значит, и плоскость α. Следовательно, точки H и H_1 принадлежат разным частям тетраэдра. Значит, эти части отображаются друг на друга при симметрии относительно прямой c. Отсюда следует, что плоскость α делит тетраэдр на две равные части.

Вар. 6. Указание. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

Вар. 7. 1. Пусть $p \parallel q$ (рис. 9, *а*). Композицией осевых симметрий последовательно относительно осей p и q является парал-

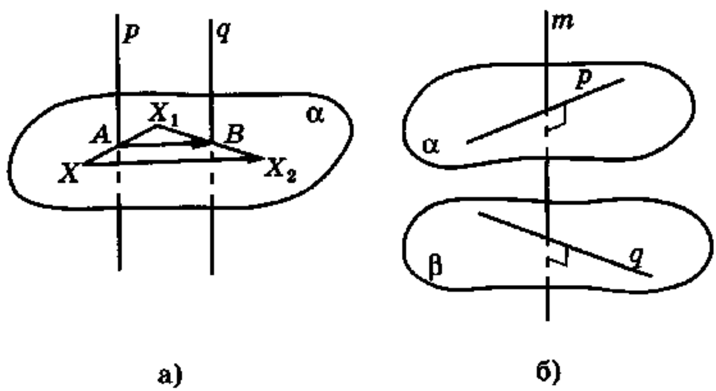


Рис. 9

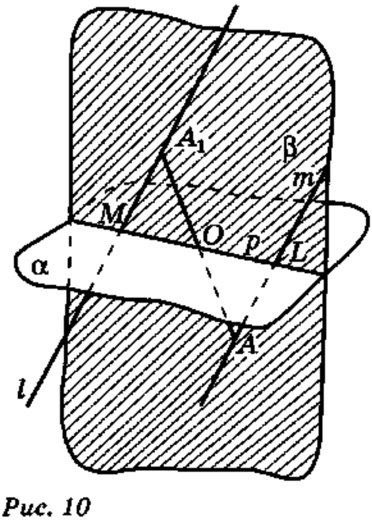


Рис. 10

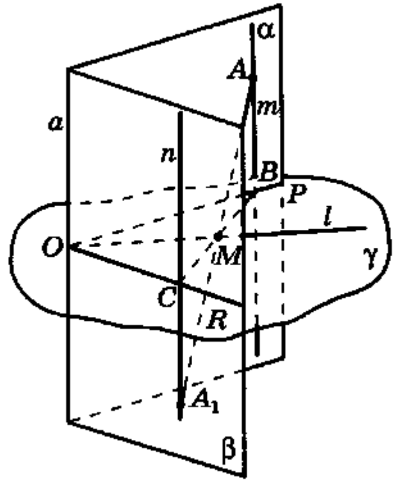


Рис. 11

лельный перенос на вектор $2\overrightarrow{AB}$, который отображает точку X на точку X_2. Композиция же симметрий последовательно относительно осей q и p есть параллельный перенос на вектор $2\overrightarrow{BA}$, который отображает точку X_2 на точку X. Исходя из равенства $2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BA}$, имеем $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, что противоречит условию. Пусть теперь p и q — скрещивающиеся прямые (рис. 9, *б*). *В* таком случае $S_q \circ S_p$ отображает общий перпендикуляр прямых p и q на себя, причем это отображение прямой m есть перенос $\vec{c} \neq \vec{0}$, но тогда $S_p \circ S_q \neq S_q \circ S_p$, что снова противоречит условию. Отсюда следует, что p и q — пересекающиеся прямые.

2. Через точку A и прямую l (рис. 10) проводим плоскость β, которая пересекает плоскость α по прямой p. В плоскости β строим прямую m, параллельную l. Пусть эта прямая пересекает p в точке L. Через середину O отрезка ML и точку A проводим прямую до пересечения с l в точке A_1. Легко доказать, что A_1 — искомая точка.

Вар. 8. **1.** На рисунке 11 угол POR — линейный угол двугранного угла $\alpha a \beta$ и l — его биссектриса. Выберем в грани α произвольную точку A и докажем, что при осевой симметрии относительно оси l она отображается на точку, принадлежащую грани β. Для этого через точку A проведем плоскость, параллельную ребру a и перпендикулярную l. Эта плоскость пересекает грани α и β по параллельным прямым m и n, а плоскость линейного угла γ по прямой CB. CB пересекает l в точке M. Через точки A и M проводим прямую до пересечения с гранью β в точке A_1. Тогда легко доказать, что $l \perp AA_1$ и $A_1M = MA$. Этим доказываем, что точки A и A_1 симметричны относительно оси l. Аналогично можно доказать, что каждая точка грани α имеет симметричную себе точку в

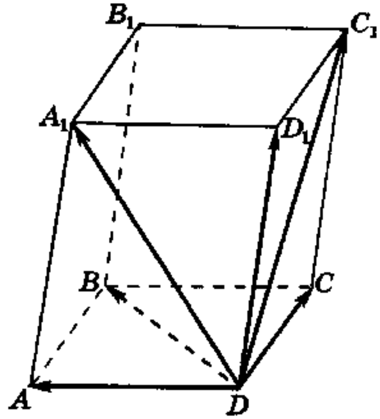


Рис. 12

грани β и наоборот. Значит, при симметрии относительно оси l двугранный угол $\alpha a \beta$ отображается на себя. Следовательно, l — ось симметрии двугранного угла.

2. На рисунке 12 $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA_1} + \overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DD_1} = 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = 2\overrightarrow{DB_1}$. Это значит, что точка B_1 есть середина диагонали построенного на отрезках DB, DA_1 и DC_1 параллелепипеда, т. е. центр его симметрии.

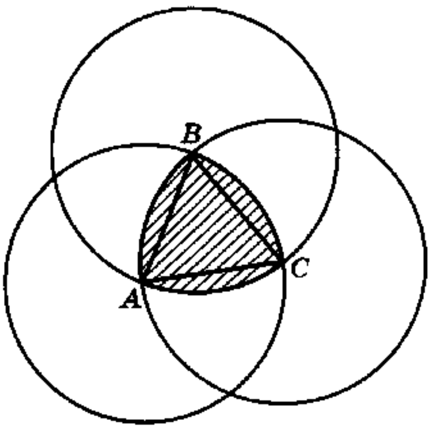


Рис. 13

С—7

Вар. 1. **1.** $\frac{S\sqrt{3}}{2}$. **2.** 8π.

Вар. 2. **1.** $2Q$. **2.** 64π.

Вар. 3. **1.** $\operatorname{arctg}(\pi \operatorname{tg} \varphi)$. **2.** $12\pi\sqrt{3}$.

Вар. 4. **1.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pi}\right)$. **2.** 8π.

Вар. 5. **1.** $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

2. πa^2. Указание. Боковая поверхность состоит из трех частей, которые вместе составляют половину площади боковой поверхности цилиндра с высотой, равной a, и радиусом оснований a (рис. 13, вид сверху).

Вар. 6. **1.** 42.

2. $\frac{\pi a^2}{2}$. Указание. Боковая поверхность состоит из трех частей, которые вместе составляют половину площади боковой поверхности цилиндра с высотой, равной a, и радиусом оснований $\frac{a}{2}$ (рис. 14, вид сверху).

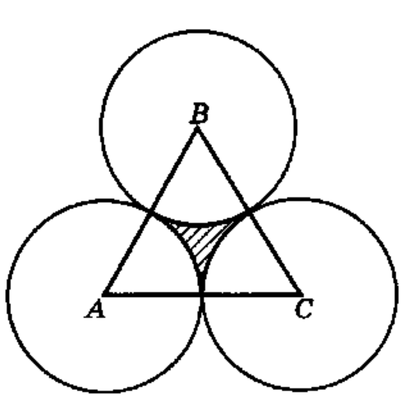


Рис. 14

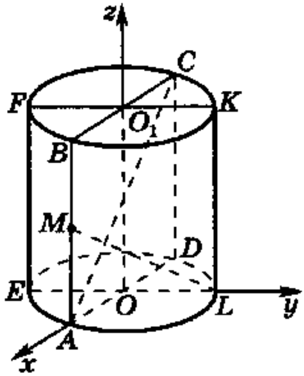


Рис. 15

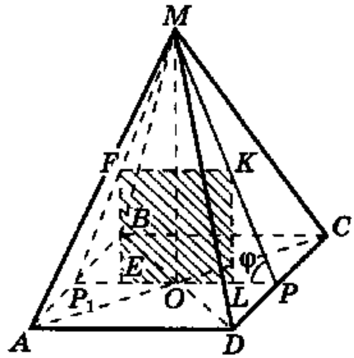


Рис. 16

Вар. 7. **1.** Поместим цилиндр в прямоугольную систему координат, как это показано на рисунке 15. Пусть R — радиус основания, а h — высота цилиндра. Имеем $A\,(R;\,0;\,0)$, $C\,(-R;\,0;\,h)$, $M\left(R;\,0;\,\frac{h}{2}\right)$, $L\,(0;\,R;\,0)$. $\overrightarrow{AC}\,\{-2R;\,0;\,h\}$, $\overrightarrow{ML}\left\{-R;\,R;\,-\frac{h}{2}\right\}$. Так как $AC \perp ML$, то $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{ML}=0$, т. е. $2R^2-\frac{h^2}{2}=0$. Кроме того, $2Rh=4$ и $h=\frac{2}{R}$. Тогда $2R^2-\frac{2}{R^2}=0$, $R=1$, $h=2$; $S=4\pi+2\pi\cdot 1=6\pi$. Ответ. 6π.

2. На рисунке 16 $EFKL$ — осевое сечение цилиндра. По условию $KL=EL=2R$, $LP=\frac{a}{2}-R$, $\frac{KL}{LP}=\operatorname{tg}\varphi=2$, $\frac{2R}{\frac{a}{2}-R}=2$. Отсюда $R=\frac{a}{4}$, $S_{бок}=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2=4\pi\frac{a^2}{16}=\frac{\pi a^2}{4}$. Ответ. $\frac{\pi a^2}{4}$.

Вар. 8. **1.** Поместим цилиндр в прямоугольную систему координат, как это показано на рисунке 15. Пусть R — радиус основания, а h — высота цилиндра, тогда $N\left(\frac{R}{2};\,\frac{R}{2};\,0\right)$, $M\left(\frac{R}{2};\,-\frac{R}{2};\,\frac{h}{2}\right)$ и $MN=\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4}}$. Исходя из условия, имеем $\begin{cases}R^2+\frac{h^2}{4}=17\\ 2Rh=16\end{cases}$ и $\begin{cases}h=\frac{8}{R}\\ R^2+\frac{16}{R^2}=17\end{cases}$, т. е. $R^4-17R^2+16=0$, откуда $R_1=1$, $R_2=4$. Значит, $h_1=8$, $h_2=2$. Тогда $S_1=16\pi+2\pi\cdot 1=18\pi$, $S_2=16\pi+2\pi\cdot 16=48\pi$. Ответ. 18π или 48π.

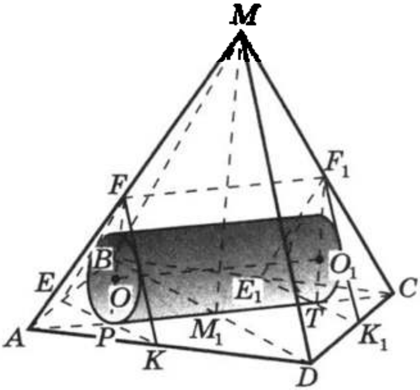


Рис. 17

2. Как показано на рисунке 17, окружности оснований цилиндра вписаны в правильные треугольники EFK и $E_1F_1K_1$. Это вытекает из того, что плоскости оснований цилиндра параллельны плоскости диагонального сечения BMD, а само диагональное сечение, исходя из условия, правильный треугольник; $AC = a\sqrt{2}$; $AP = \frac{a\sqrt{2} - h}{2}$;

$EK = 2\,AP = a\sqrt{2} - h$.

Радиус основания цилиндра $r = \frac{EK}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2} - h}{2\sqrt{3}}$.

$$S_{бок} = 2\pi rh = 2\pi \frac{\alpha\sqrt{2} - h}{2\sqrt{3}} \cdot h = \frac{\pi h}{\sqrt{3}}(a\sqrt{2} - h).$$

Ответ. $\frac{\pi h}{\sqrt{3}}(a\sqrt{2} - h)$.

С—8

Вар. 1. **1.** πa^2. **2.** 64π.

Вар. 2. **1.** $\frac{\pi m^2\sqrt{3}}{4}$. **2.** 2 и 14.

Вар. 3. **1.** $8\sqrt{2}$. **2.** $\pi L^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

Вар. 4. **1.** 150π. **2.** $\frac{\pi m^2 \operatorname{ctg}\varphi}{\sin\varphi}$.

Вар. 5. **1.** Если наибольший угол между образующими конуса тупой, то наибольшую площадь имеет сечение с взаимно перпендикулярными образующими, а если острый или прямой, то осевое сечение. Если α — центральный угол развертки, то $\alpha = \frac{R}{L} \cdot 360$ и тогда $\frac{R}{L} = \frac{3}{4}$. Пусть φ — наибольший угол между образующими и $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $45° < \frac{\varphi}{2} < 90°$, т. е. $90° < \varphi < 180°$. Следовательно, наибольшую площадь имеет сечение с взаимно перпендикулярными образующими. Если β — искомый угол, то $\sin\beta = \frac{H}{h}$, где H — высота конуса, h — высота сечения. $H = \sqrt{L^2 - \frac{9}{16}L^2} = \frac{L\sqrt{7}}{2}$; $h = \frac{L\sqrt{2}}{2}$. Тогда $\sin\beta = \frac{\sqrt{14}}{4}$ и $\beta = \arcsin\frac{\sqrt{14}}{2}$. **Ответ.** $\arcsin\frac{\sqrt{14}}{2}$.

2. $60°$.

Вар. 6. **1.** 90°. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5, но в данном случае наибольшую площадь имеет осевое сечение.

2. 60°.

Вар. 7. **1.** Основание конуса лежит в плоскости $z = -2$. Пусть $M\ (x;\ y;\ -2)$ — центр окружности основания, $MA = MB = MC$.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}.$$

Отсюда следует, что $\begin{cases}-2x-4y+5=-8x-4y+20\\-2x-4y+5=-6x-8y+25,\end{cases}$ откуда $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{5}{2}$ и $z=-2$. Координаты вершины конуса $M\left(\frac{5}{2};\ \frac{5}{2};\ 1\right)$. Радиус основания $R=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. Образующая $L=\sqrt{\frac{10}{4}+9}=\frac{\sqrt{46}}{2}$.

$$S_{\text{бок}}=\pi RL=\pi\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{46}}{2}=\frac{\pi\sqrt{115}}{2}.$$

Сечение делит высоту конуса в отношении $1:3$.

$$S_{\text{осн}}=\frac{5\pi}{2},\quad S_{\text{сеч}}=\frac{1}{9}\cdot S_{\text{осн}}=\frac{5\pi}{18}.$$

Ответ. $S_{\text{сеч}}=\frac{5\pi}{18}$, $M\left(\frac{5}{2};\ \frac{5}{2};\ 1\right)$, $S_{\text{бок}}=\frac{\pi\sqrt{115}}{2}$.

2. Пусть $ABCD$ — осевое сечение конуса и $AC\perp BD$, BK — высота конуса. Легко доказать, что $BK=KD$, $KD=R+r$, где R и r — радиусы оснований. Пусть L — образующая конуса и φ — угол между ней и плоскостью основания. Отсюда $BK=KD=L\cdot\sin\varphi$. В таком случае $R+r=L\cdot\sin\varphi$ и $S_{\text{бок. ус. конуса}}=\pi L^2\cdot\sin\varphi$. Площадь боковой поверхности второго конуса равна

$$\pi\cdot BK\cdot BD=\pi L\cdot\sin\varphi\cdot L\sqrt{2}\sin\varphi=\pi L^2\sqrt{2}\sin^2\varphi.$$

По условию $\frac{\pi L^2\sin\varphi}{\pi L^2\sqrt{2}\sin^2\varphi}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Отсюда $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varphi=60°$.

Ответ: 60°.

Вар. 8. **1.** $\frac{65\pi}{4}$. Указание. Необходимо учесть, что треугольник ABC прямоугольный и радиус основания конуса равен $\frac{5}{2}$.

2. 60°.

С—9

Вар. 1. **1.** $\frac{84\pi}{5}$. **2.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{12}$.

Вар. 2. **1.** 16π. **2.** $\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{9}$.

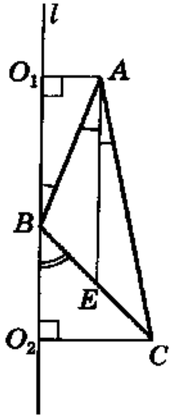


Рис. 18

Вар. 3. **1.** $\pi a^2(3+\sqrt{2})$. **2.** $\dfrac{\pi a^2}{4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta}$.

Вар. 4. **1.** 96π. **2.** $\dfrac{\pi a^2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\varphi}$.

Вар 5. **1.** Обозначим через S_a площадь поверхности, которая образуется при вращении отрезка a вокруг оси. Тогда

$$S_{\text{т. вращ.}}=\pi\cdot AC\cdot(AO_1+CO_2)+$$
$$+\pi a\cdot AO_1+\pi a\cdot CO_2=$$
$$=\pi(AO_1+CO_2)\cdot(AC+a)\ (\text{рис. } 18);$$
$$\angle BAC=\angle BCA=30^\circ;$$
$$\angle BAE=\angle O_1BA=15^\circ;\ \angle O_2BC=45^\circ;$$
$$AC=a\sqrt{3};\ AO_1=a\sin 15^\circ;\ CO_2=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

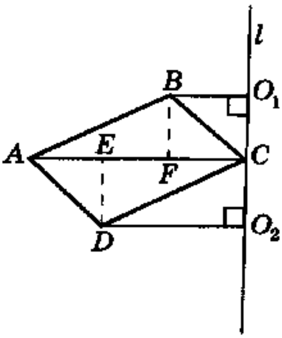


Рис. 19

Тогда $S=\pi a^2\left(\sin 15^\circ+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{3}+1)$.

Ответ. $\pi a^2\left(\sin 15^\circ+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{3}+1)$.

2. $S=\dfrac{m^2\operatorname{ctg}\varphi\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}}{1+\operatorname{ctg}^2\varphi\cdot\cos^2\dfrac{\pi}{5}}$.

Вар. 6. **1.** $S_{\text{т. вращ.}}=\pi BC\cdot BO_1+\pi\cdot AB\times$ $\times(AC+BO_1)+\pi\cdot AD\cdot(AC+DO_2)+\pi DC\cdot DO_2$.

Так как $AB=CD$ и $BC=AD$ (рис. 19), то

$$S=\pi\cdot BC\cdot BO_1+\pi\cdot AB\cdot(AC+BO_1)+$$
$$+\pi\cdot BC\cdot(AC+DO_2)+\pi\cdot AB\cdot DO_2=$$
$$=\pi\cdot BC\cdot(BO_1+DO_2+AC)+$$
$$+\pi\cdot AB\cdot(BO_1+DO_2+AC)=$$
$$=\pi(AB+BC)\cdot(BO_1+DO_2+AC);$$
$$AB+BC=\frac{P}{2},\ BO_1+DO_2=AC.$$

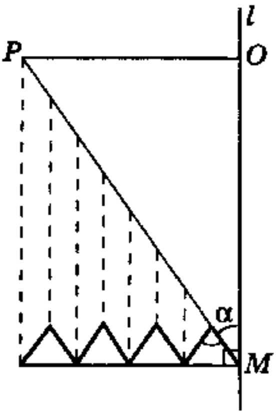


Рис. 20

Тогда $S=\pi\dfrac{P}{2}\cdot 2\cdot AC=\pi Pd$.

Ответ. πPd.

2. $\dfrac{L^2\operatorname{ctg}\varphi\cdot\cos\dfrac{\pi}{5}}{\operatorname{ctg}^2\varphi+\cos^2\dfrac{\pi}{5}}$.

Вар. 7. **1.** Можно доказать, что площадь поверхности, образованной при вращении ломаной линии вокруг оси l (рис. 20), равна площади поверхности, которая образуется при вращении отрезка MP вокруг той же оси.

$MP = 8a$; $\angle PMO = \dfrac{\alpha}{2}$; $PO = 8a \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

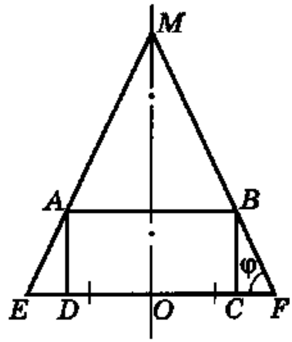


Рис. 21

$$S_{\text{т. вращ.}} = \pi \cdot PO \cdot PM = \pi \cdot 8a \cdot 8a \sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 64\pi a^2 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ. $64\pi a^2 \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

2. На рисунке 21 изображено осевое сечение конуса; $OC = \dfrac{a}{2}$; BC — высота правильного треугольника, лежащего в основании призмы; $BC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Радиус основания конуса $R = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\varphi$. Высота конуса $H = \dfrac{a}{2}(1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\varphi)\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

$$S_{\text{ос. сеч.}} = RH = \frac{a^2}{\frac{4}{3}}(1+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\varphi)^2\cdot\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{\operatorname{tg}\varphi} + 2\sqrt{3}\right);$$

$$\operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{\operatorname{tg}\varphi} = \sqrt{3}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\varphi}\right) \geqslant 2\sqrt{3}.$$

$S_{\text{наим.}} = a^2\sqrt{3}$. Это достигается, если $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, т. е. $\varphi = 60°$.

Ответ. $S = \dfrac{a^2}{4}\left(\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{3}{\operatorname{tg}\varphi} + 2\sqrt{3}\right)$; $S_{\text{наим.}} = a^2\sqrt{3}$; $\varphi = 60°$.

Вар. 8. 1. $36\pi a^2\sqrt{2}$.

2. $S = \dfrac{a^2}{3}\left(\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{3}{\operatorname{tg}\varphi} + 2\sqrt{3}\right)$; $S_{\text{наим.}} = \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$; $\varphi = 60°$.

Задача решается аналогично задачам из варианта 7.

С—10

Вар. 1. 1. а) $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 16$; б) да; нет. 2. 13.

Вар. 2. 1. а) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9$; б) нет; да. 2. 13.

Вар. 3. 1. $(x-1)^2 + y^2 + (z-\sqrt{3})^2 = 4$ или $(x-1)^2 + y^2 + (z+\sqrt{3})^2 = 4$. 2. $\dfrac{a\sqrt{2\cos 2\alpha}}{4}$.

Вар. 4. 1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ или $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$. 2. $\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Вар. 5. **1.** Очевидно, что $z = 0$. Пусть $M\ (x;\ y;\ z)$ — искомая точка пересечения. Она лежит на прямой AB. Это значит, что $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AM}\ \{x-\sqrt{2};\ y-\sqrt{2};\ z\};\ \overrightarrow{AB} = \{-2\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2}\};$$
$$\begin{cases} x-\sqrt{2} = -2k\sqrt{2} \\ y-\sqrt{2} = k\sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2k\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ y = k\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2}. \end{cases}$$

С другой стороны, эта точка лежит на сфере. Тогда
$$(\sqrt{2}(1-2k))^2 + (\sqrt{2}(k+1))^2 + (k\sqrt{2})^2 = 4.$$

Отсюда $6k^2 - 2k = 0$; $k_1 = 0$, $k_2 = 3$.

Следовательно, $x_1 = -5\sqrt{2}$, $\quad x_2 = \sqrt{2}$,
$y_1 = 4\sqrt{2}$, $\quad y_2 = \sqrt{2}$,
$z_1 = 3\sqrt{2}$, $\quad z_2 = 0$.

Ответ. $(-5\sqrt{2};\ 4\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 0)$.

2. Отметим, что центр сферы $O_1\left(0;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$ и ее радиус равен $\frac{7}{13}$. Опустим из начала координат перпендикуляр OK на AB, $OK = \frac{12}{5}$. Соединим точки C и K. В треугольнике COK опустим перпендикуляр OM на CK, $CK = \sqrt{\frac{144}{25}+1} = \frac{13}{5}$, $OM = \frac{12}{13}$ (OM — расстояние от точки O до плоскости ABC). Проведем $O_1M_1 \perp CK$ (O_1M_1 — расстояние от центра сферы O_1 до плоскости ABC), $O_1M_1 = \frac{1}{2}OM = \frac{6}{13} < \frac{7}{13}$. Следовательно, пересечением сферы и плоскости является окружность радиуса $r = \sqrt{\frac{49}{169} - \frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$. Длина этой окружности $C = \frac{2\pi\sqrt{13}}{13}$.

Ответ. Да, пересекает; длина линии пересечения равна $\frac{2\pi\sqrt{13}}{13}$.

Вар. 6. **1.** $\left(2;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(0;\ 3;\ -\frac{5}{2}\right)$.

2. Если $R > \frac{2}{7}$, то сфера и плоскость пересекаются по окружности. Если $R = \frac{2}{7}$, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Если $R < \frac{2}{7}$, то сфера и плоскость общих точек не имеют.

Указание. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

Вар. 7. **1.** Перепишем уравнения данных сфер в каноническом виде:

$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ и $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9.$

Первая сфера имеет центр в точке O_1 (1; 0; −1), а вторая — в точке O_2 (−1; 1; 1). Радиусы сфер $R_1 = 2$, $R_2 = 3$. Расстояние между центрами $O_1O_2 = \sqrt{4+1+4} = 3$; $R_2 - R_1 < O_1O_2 < R_1 + R_2$. Следовательно, сферы пересекаются. Пусть A — общая точка этих сфер. Тогда высота h треугольника O_1AO_2 есть радиус линии пересечения этих сфер, $O_1O_2 = 3$, $O_1A = 2$, $O_2A = 3$, $S_{O_1AO_2} = 2\sqrt{2}$, $h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Тогда длина окружности $C = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$. Ответ. $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

2. M $(x; y; z)$ принадлежит искомому множеству.

$$MA = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2};\ MB = \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2};\ 2MA = MB;$$

$$2\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2};$$

$$4\,(x-2)^2 + 4y^2 + 4z^2 = (x+4)^2 + y^2 + z^2.$$

Отсюда $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16.$

Ответ. Искомое множество — сфера $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16.$

Вар. 8. **1.** $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 22.$

2. $x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + z^2 = \frac{16}{9}$. Указание. Задача решается аналогично задаче из варианта 7.

С—11

Вар. 1. **1.** 400π. **2.** 6π.

Вар. 2. **1.** 676π. **2.** 4π.

Вар. 3. **1.** 676π. **2.** $4\sqrt{2}$.

Вар. 4. **1.** 676π. **2.** 36π, 36π.

Вар. 5. **1.** $8\sqrt{2}$.

2. Пусть искомое расстояние равно x. Тогда радиус большей окружности кольца равен $\sqrt{R^2 - x^2}$, радиус меньшей окружности $R - x$. Последнее следует из того, что осевое сечение — равнобедренный прямоугольный треугольник. $S_к = \pi\,(R^2 - x^2 - (R-x)^2) = 2\pi\,(-x^2 + Rx)$. Легко доказать, что наибольшее значение этой функции достигается при $x = \frac{R}{2}$. Ответ. $\frac{R}{2}$.

Вар. 6. **1.** 4 и 5.

2. Пусть искомое расстояние равно x. Тогда радиус основания цилиндра равен $\sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь боковой поверхности цилиндра

$$S = 2\pi x\sqrt{R^2 - x^2} = 2\pi\sqrt{R^2x^2 - x^4}.$$

Рассмотрим функцию $p(x) = R^2x^2 - x^4$, где $0 < x < R$. Эта функция, а значит, и площадь боковой поверхности цилиндра, достигает наибольшего значения при $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Ответ. $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Вар. 7. 1. Концы хорд MA, MB и MC лежат на поверхности шара и являются вершинами правильного треугольника ABC. Образовалась правильная пирамида $MABC$. Пусть MO_1 — высота этой пирамиды. Тогда центр O шара лежит в точке пересечения серединного перпендикуляра KO к ребру MA (K — середина AM). Легко доказать, что $\Delta KOM \sim \Delta MO_1A$. Отсюда $R_ш = MO = \frac{AM^2}{2MO_1}$. Пусть длина хорды равна a. Тогда $AC = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$ и $AO_1 = \frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$.

$$MO_1 = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$R = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Отсюда $a = \frac{2R\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{1 + 2\cos\alpha}}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $\frac{2R\sqrt{1 + 2\cos\alpha}}{\sqrt{3}}$.

2. $\pi(a^2 + b^2 + c^2)$. Указание. Диаметром сфер служит диагональ параллелепипеда, построенного на этих хордах.

Вар. 8. 1. Центры этих шаров являются вершинами правильного тетраэдра, длина ребра которого равна $2R$. Центр искомой сферы совпадает с центром названного тетраэдра. Ее радиус равен разности радиуса сферы, которой принадлежит вершина тетраэдра, и радиуса шара. Радиус сферы можно найти, например, способом, который показан в задаче 1 из варианта 7. Ее радиус равен $\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Тогда радиус искомой сферы равен

$$\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - R = \frac{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - 2).$$

Ответ. $\frac{R}{2}(\sqrt{6} - 2)$.

2. Суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра равны между собой. Указание. Необходимо воспользоваться тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к сфере, равны между собой.

Вар. 1. 1. 2. 2. $\frac{6}{\pi}$.

Вар. 2. 1. $\frac{2}{3}$. 2. 16π.

Вар. 3. 1. $1\frac{1}{6}$. Указание. Центр описанного шара лежит ниже плоскости основания. Для нахождения радиуса описанного шара можно, например, воспользоваться тем, что $R_ш = \frac{L^2}{2H}$, где L — длина бокового ребра пирамиды, а H — ее высота.

2. $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

Вар. 4. 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. 676π.

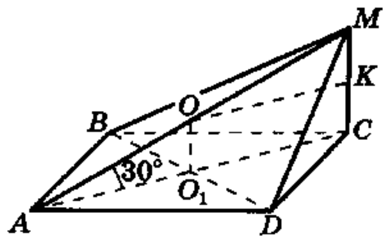


Рис. 22

Вар. 5. 1. На рисунке 22 изображена пирамида $MABCD$, $ABCD$ — квадрат, $MC \perp ABC$. Центр описанного шара лежит на середине O ребра AM (в точке пересечения перпендикуляра к плоскости основания, проведенного через центр O_1 квадрата, и серединного перпендикуляра OK к ребру MC). Пусть сторона квадрата a. Тогда $AC = a\sqrt{2}$. С другой стороны, $AC = 2R\cos 30° = R\sqrt{3}$, $a\sqrt{2} = R\sqrt{3}$. Отсюда

$$a = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ MC = a\sqrt{2}\cdot \operatorname{tg}30° = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ MD = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{бок} = MC\cdot CD + MD\cdot AD = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{a^2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}(\sqrt{5}+\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{2R^2}{2\sqrt{3}}(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2}).$$

Ответ. $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})$.

2. $\frac{1}{4}(a+b)^2\sqrt{3}$. Указание. Апофема рассматриваемой пирамиды равна сумме апофем ее оснований.

Вар. 6. 1. Пусть $MABC$ — правильная треугольная пирамида. $MO_1 \perp ABC$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1K на ребро AC и соединим точки M и K; $\angle MKO_1$ — линейный угол двугранного угла, который образуется боковой гранью с плоскостью основания. Центр шара лежит в точке O пересечения биссектрисы KO этого линейного угла с высотой пирамиды MO_1. Исходя из условия $\frac{OO_1}{OM} = \frac{1}{3}$. Из свойств биссектрисы угла треугольника

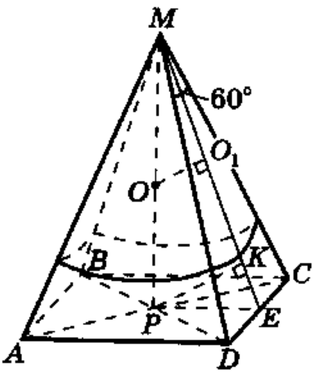


Рис. 23

следует, что и $\frac{KO_1}{KM} = \frac{1}{3}$. Это значит, что $\cos \angle MKO_1 = \frac{1}{3}$, $O_1K = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Тогда $MK = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Боковое ребро $AM = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a$. Ответ. a.

2. $4R^2\sqrt{2}$.

Вар. 7. 1. Легко доказать, что данная пирамида является правильной. Линия пересечения состоит из четырех равных дуг окружностей, которые получаются при пересечении сферы с гранями пирамиды (рис. 23). Для нахождения радиуса этих окружностей необходимо определить расстояние от центра шара до граней пирамиды. На рисунке

$$PK \perp DMC \text{ и } OO_1 \perp DMC,\ OO_1 = \frac{1}{2}PK,\ PK = \frac{MP \cdot PE}{ME},$$

$$ME = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ PE = \frac{a}{2},\ MP = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$PK = \frac{a\sqrt{2}a \cdot 2}{2 \cdot 2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\ OO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.$$

Радиус окружности

$$MO_1 = \sqrt{MO^2 - OO_1^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{16} - \frac{2a^2}{16 \cdot 3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Градусная мера каждой из дуг линии пересечения равна 120°. Тогда $l = \frac{\pi \cdot a \cdot 120}{2\sqrt{3} \cdot 180} = \frac{\pi a}{3\sqrt{3}}$. В таком случае длина линии пересечения равна $\frac{4\pi a}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}$.

Ответ. $\frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}$.

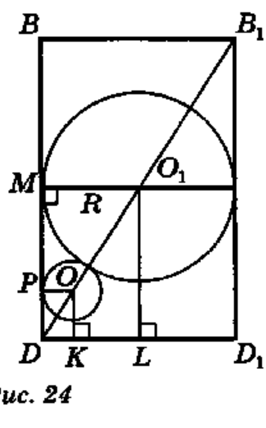


Рис. 24

2. На рисунке 24 изображено диагональное сечение BB_1D_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вместе с большими кругами вписанных шаров; $\Delta O_1LD \sim \Delta OKD$. Пусть радиус малого шара равен x. Тогда $\frac{x}{R} = \frac{OK}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$, $R = \frac{a}{2}$. Отсюда $OK = x\sqrt{2}$; из $\triangle OKD$ имеем $OD = \sqrt{2x^2 + x^2} = x\sqrt{3}$;

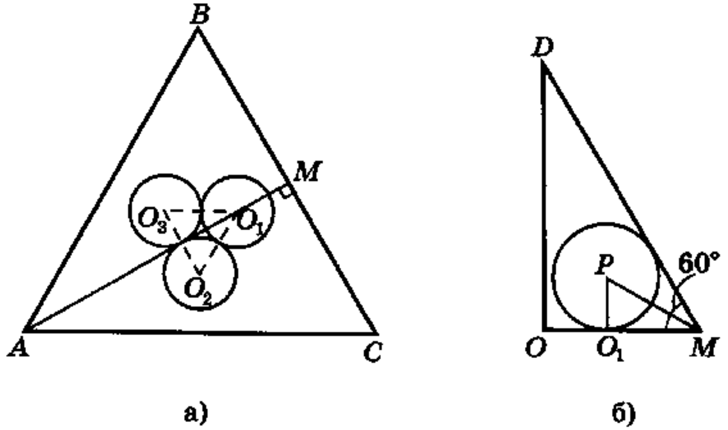


Рис. 25

$B_1D = a\sqrt{3}, O_1D = x + R + x\sqrt{3}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = x + \dfrac{a}{2} + x\sqrt{3}$. В таком случае $x = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{a}{2}(2-\sqrt{3})$. Ответ. $\dfrac{a}{2}(2-\sqrt{3})$.

Вар. 8. **1.** $\dfrac{9a}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. Плоский угол при вершине пирамиды равен $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ радиан.

2. На рисунке 25, *а* показан вид сверху правильной пирамиды $DABC$ с изображениями вписанных в нее шаров. На рисунке 25, *б* изображен треугольник DOM, где DO — высота пирамиды, DM — ее апофема. Окружность с центром в точке P — изображение сечения шара плоскостью DAM. Пусть радиус равен x. Тогда $O_1M = x \operatorname{ctg} 30° = x\sqrt{3}$, $OM = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. Треугольник $O_1O_2O_3$ — правильный со стороной, равной $2x$.

$$OO_1 = \frac{2x}{\sqrt{3}},\ OM = O_1M + OO_1,\ \frac{a}{2\sqrt{3}} = x\sqrt{3} + \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда $x = \dfrac{a}{10}$. Ответ. $\dfrac{a}{10}$.

С—13

Вар. 1. **1.** 24. **2.** $144\sqrt{3}$.

Вар. 2. **1.** 32. **2.** $54\sqrt{3}$.

Вар. 3. **1.** $\dfrac{d^3\sqrt{2}}{8}$. **2.** $24\sqrt{3}$.

Вар. 4. **1.** $a^3\sqrt{2}$. **2.** 40.

Вар. 5. **1.** Пусть диагонали основания пересекаются в точке O. В плоскости DBB_1 проводим через точку O прямую, параллельную DB_1, до пересечения с ребром BB_1 в точке E. Эту точку соединим с вершинами A и C. Сечение AEC искомое. Из точки B опускаем перпендикуляр BK на AC и точку K соединяем с точкой E; $\angle EKB = 45°$, $BE = BK = \frac{24}{5}$, $BB_1 = 2BE = \frac{48}{5}$, $V = 6 \cdot 8 \cdot \frac{48}{5} = 460{,}8$. Ответ. 460,8.

2. $\frac{a^3\sqrt{2\cos 2\alpha}}{4\sin\alpha}$. Указание. Из вершины C необходимо опустить перпендикуляр CK на AB. Легко доказать, что $CK \perp AA_1B_1$. В таком случае $\angle CB_1K = \alpha$. Дальнейшее решение очевидно.

Вар. 6. **1.** $\frac{216\sqrt{5}}{2}$. **2.** $\frac{h^3\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}$. Указание. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

Вар. 7. **1.** На рисунке 26 показано сечение параллелепипеда указанной плоскостью. $BK \perp EK$, $\angle B_1KB = 45°$. Так как R и T — середины сторон AD и CD, то легко получить $BE = 9$, $BF = 12$. В таком случае $EF = 15$ и $BK = \frac{BE\cdot BF}{EF} = \frac{36}{5}$, $BB_1 = \frac{36}{5}$, $V = 6\cdot 8\cdot\frac{36}{5} = 345{,}6$. Ответ. 345,6.

2. Достроим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ до прямоугольного параллелепипеда $ADBCA_1D_1B_1C_1$ (рис. 27). В таком случае угол между AC_1 и B_1C равен углу D_1AC_1. По условию $\angle D_1AC_1 = \arccos\frac{3\sqrt{2}}{10}$. Пусть $AC = x$, тогда $AC_1 = \sqrt{x^2+9}$, $DC = AB = \sqrt{x^2+16}$ и $AD_1 = 5$. По теореме косинусов имеем:

$$x^2 + 16 = 25 + x^2 + 9 - 2\cdot 5\cdot\sqrt{9+x^2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{10};$$

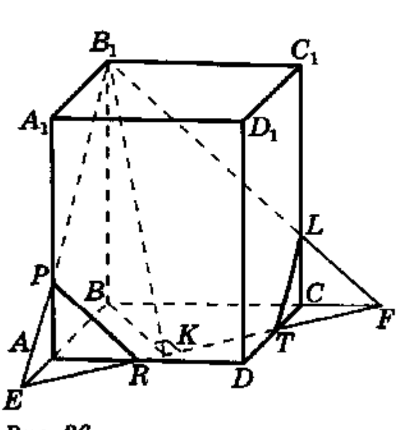


Рис. 26

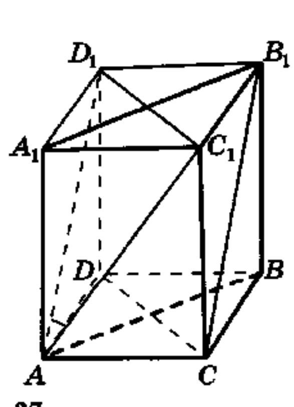


Рис. 27

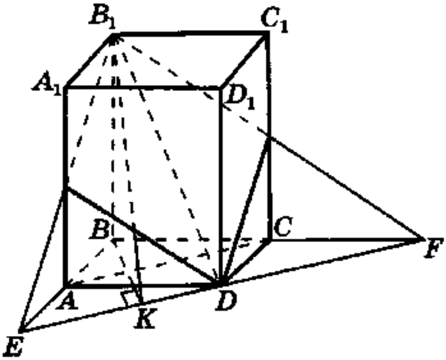


Рис. 28

$$16 = 34 - 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{9+x^2};$$
$$3\sqrt{2}\cdot\sqrt{9+x^2} = 18;$$
$$\sqrt{9+x^2} = 3\sqrt{2};\ 9 + x^2 = 18;$$
$$x^2 = 9;\ x = 3.$$
$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$$
и $V = 6\cdot 3 = 18.$

Ответ. 18.

Вар. 8. **1.** Сечение показано на рисунке 28. Линия пересечения EF с плоскостью основания параллельна диагонали основания AC, $BK \perp EF$, $\angle BKB_1 = 60°$, $EB = 10$, $BF = 24$. Тогда $EF = 26$,

$$BK = \frac{BE\cdot BF}{EF} = \frac{120}{13},\quad BB_1 = \frac{120\sqrt{3}}{13}.\quad V = 5\cdot 12\cdot\frac{120\sqrt{3}}{13} = \frac{7200\sqrt{3}}{13}.$$

Ответ. $\frac{7200\sqrt{3}}{13}$.

2. Поместим призму в прямоугольную систему координат с началом в вершине C. Пусть CA принадлежит оси Ox, CB — оси Oy и CC_1 — оси Oz. Тогда A (3; 0; 0), B (0; 6; 0), P (0; 3; z) ($z > 0$). Точка M (1; 2; 0) — точка пересечения медиан; $\overrightarrow{MP}$ {−1; 1; z}. Если φ — угол между MP и плоскостью xOz (грань AA_1C_1C принадлежит этой плоскости), то

$$\sin\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{MP}\cdot\vec{j}}{|\overrightarrow{MP}|\cdot|\vec{j}|}\right|,\ \text{где}\ \vec{j}\,\{0;\ 1;\ 0\};\ \overrightarrow{MP}\cdot\vec{j} = 1;$$

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{1+1+z^2} = \sqrt{2+z^2};\qquad \frac{1}{\sqrt{2+z^2}\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{2+z^2};\ z^2 = 1;\ z = 1\ \ (z > 0).$$

Тогда $CC_1 = 2$. $V = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot 2 = 18$. Ответ. 18.

С—14

Вар. 1. **1.** $768\sqrt{3}$. **2.** $3\pi R^2$.

Вар. 2. **1.** 125. **2.** 3468π.

Вар. 3. **1.** $\frac{576\sqrt{3}}{5}$. **2.** $\frac{16000\pi}{729}$.

Вар. 4. **1.** 36. **2.** $\frac{1024\pi}{27}$.

Вар. 5. 1. $\frac{441\sqrt{143}}{2}$. Указание. Необходимо доказать, что треугольник B_1FE прямоугольный с прямым углом B_1FE.

2. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$. Указание. Объем меньшей отсеченной части равен $\frac{1}{3}$ от разности объемов цилиндра и правильной треугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

Вар. 6. 1. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. 2. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$.

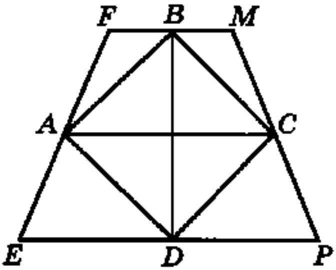


Рис. 29

Вар. 7. 1. На рисунке 29 показан вид сверху на куб и описанную около него призму. Пусть x — длина ребра куба, AC — средняя линия трапеции, $AC = x\sqrt{2}$. Высота трапеции $BD = x\sqrt{2}$, $S_{\text{трап}} = x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} = 2x^2$. Высота призмы равна x.

$$V_{\text{пр}} = 2x^2 \cdot x = 2x^3.$$

Очевидно, что

$$2x\sqrt{2} = a + b,\ x = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}.$$

$$V = 2\frac{(a+b)^3}{16\sqrt{2}} = \frac{(a+b)^3\sqrt{2}}{16}.$$

Ответ. $\frac{(a+b)^3\sqrt{2}}{16}$.

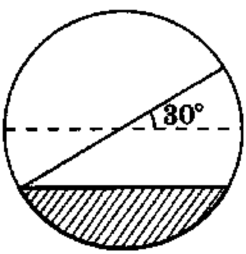


Рис. 30

2. На рисунке 30 заштрихована та часть жидкости, которая останется после поворота корыта на 30°. Пусть радиус основания цилиндра R, а его высота H. Тогда объем оставшейся части жидкости равен

$$\frac{R^2H(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}.$$

Этот результат был получен при решении задачи 1 из варианта 5. Объем вылившейся жидкости

$$\Delta V = \frac{\pi R^2 H}{2} - \frac{R^2H(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{R^2H}{12}(2\pi + 3\sqrt{3}).$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{R^2H(2\pi - 3\sqrt{3})}{12 \cdot \frac{1}{2}\pi R^2 H} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}61.$$

Ответ. $\approx 61\%$.

Вар. 8. 1. Очевидно, что плоскость сечения пересечет грань, которая проходит через сторону основания AF (рис. 31). Пусть $KF = x$ и сторона основания a. Необходимо учесть, что объемы призм с одинаковой высотой относятся друг к другу как площади их оснований. Плоскость сечения делит призму на две призмы. Объем призмы с основанием $KDEF$ составляет $\frac{1}{4}$ от объема всей призмы:

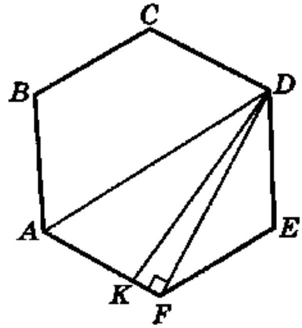


Рис. 31

$$S_{KDEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}x \cdot a\sqrt{3};\ S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}x \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Отсюда находим, что

$$x = \frac{a}{4} \text{ и } KD = \sqrt{\frac{a^2}{16} + 3a^2} = \frac{7a}{4}.$$

$S_{сеч} = KD \cdot h$, где h — высота призмы; $S_{сеч} = \frac{7ah}{4}$. По условию $ah = Q$. В таком случае $S_{сеч} = \frac{7}{4}Q$. Ответ. $\frac{7}{4}Q$.

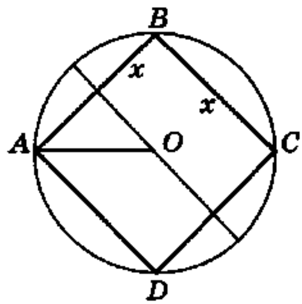


Рис. 32

2. На рисунке 32 показан вид сверху на два данных цилиндра. Пусть диаметр основания и высота вписанного цилиндра равны x и пусть радиус основания большого цилиндра R. Очевидно, что высота этого цилиндра равна x. Тогда его объем $V_1 = \pi R^2 x$.

$$V_2 = \pi\frac{x^2}{4} \cdot x = \frac{\pi x^3}{4}.$$

Но $x = R\sqrt{2}$. Тогда $V_1 = \pi R^3\sqrt{2}$ и $V_2 = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$. В таком случае $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$. Ответ. 1 : 2.

С—15

Вар. 1. 1. $\frac{375}{8}$. 2. 600.

Вар. 2. 1. $120\sqrt{3}$. 2. 600.

Вар. 3. 1. $\frac{a^2b\sqrt{2}}{4}$. 2. $120\sqrt{2}$.

Вар. 4. 1. $\frac{abc\sqrt{2}}{2}$. 2. $250\sqrt{3}$.

Вар. 5. 1. Пусть в наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит правильный треугольник ABC и пусть $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 45°$. Тогда легко доказать, что грань CC_1B_1B — квадрат. Обозначим длину каждого ребра через x. Тогда

$$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = \frac{x^2\sqrt{2}}{2}, \text{ а } S_{CC_1B_1B} = x^2.$$

По условию $x^2 + 2\dfrac{x^2\sqrt{2}}{2} = 4(1+\sqrt{2})$. Отсюда $x = 2$. Зная длину ребер призмы, легко найти ее высоту, которая равна $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $S_{\text{осн}} = \sqrt{3}$.

В таком случае $V_{\text{призмы}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2$.

Ответ. 2.

2. Расстояние от бокового ребра до диагонали противоположной грани равно расстоянию от бокового ребра до этой грани. Построим перпендикулярное сечение призмы. Пусть d — расстояние от бокового ребра до противолежащей боковой грани, m — сторона перпендикулярного сечения, противолежащая этому боковому ребру, и l — боковое ребро призмы.

$$V = S_{\text{перп. сеч}} \cdot l = \frac{1}{2}dml = \frac{1}{2}dQ,$$

где Q — площадь боковой грани. Тогда $V = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 40 = 100$.

Ответ. 100.

Вар. 6. 1. Пусть в наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и пусть плоскость грани AA_1C_1C перпендикулярна к плоскости основания. В таком случае можно доказать, что CC_1B_1B — квадрат и высота призмы A_1O проектируется на сторону основания AC. Обозначим равные ребра призмы через x. Тогда $A_1O = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. Опустим из точки O перпендикуляр OK на AB и соединим точки K и A_1. В таком случае $A_1K \perp AB$, $AO = \dfrac{x}{2}$,

$OK = \dfrac{x}{2\sqrt{2}}$, $A_1K = \sqrt{x^2 - \dfrac{x^2}{8}} = \dfrac{x\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$.

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{x\sqrt{7}}{2\sqrt{2}},\ x\sqrt{2} = \frac{x^2\sqrt{7}}{2},\ S_{AA_1C_1C} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2},\ S_{CC_1B_1B} = x^2.$$

По условию $\dfrac{x^2\sqrt{7}}{2} + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2} + x^2 = 2(\sqrt{7}+\sqrt{3}+2)$. Отсюда $x = 2$.

$$V = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^3\sqrt{3}}{4}.$$

Так как $x = 2$, то $V = 2\sqrt{3}$.
Ответ. $2\sqrt{3}$.

2. $30\sqrt{2}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. **1.** На рисунке 33 MPK — перпендикулярное сечение призмы. $V_{\text{призмы}} = S_{MPK} \cdot AA_1$. Для нахождения площади перпендикулярного сечения необходимо найти угол PMK, т. е. угол между скрещивающимися прямыми EB и FC, где $EB \perp AA_1$ и $FC \perp AA_1$, $EA = EB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $FC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $FA = \frac{a}{2}$. Если φ — искомый угол, то

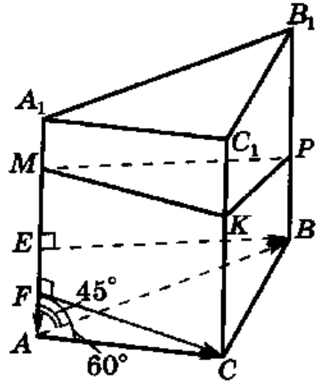


Рис. 33

$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{EB}|\cdot|\overrightarrow{FC}|}\right|.$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}) =$$
$$= \overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$$
$$= \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2} + a\cdot\frac{a}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + a\cdot a\cdot\frac{1}{2} =$$
$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = \frac{a^2}{4}(2-\sqrt{2}).$$

Отметим, что $\widehat{\overrightarrow{FA}\,\overrightarrow{AB}} = 135°$ и $\widehat{\overrightarrow{EA}\,\overrightarrow{AC}} = 120°$;

$$\cos\varphi = \frac{a^2(2-\sqrt{2})}{4\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}};\qquad \sin\varphi = \sqrt{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}};$$

$$S_{MPK} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{2} = \frac{a^2}{4}\cdot\sqrt[4]{2};$$

$$V = \frac{a^2 b\sqrt[4]{2}}{4}.$$

Ответ. $\frac{a^2 b\sqrt[4]{2}}{4}$.

2. По условию BB_1D_1D — прямоугольник. Из этого следует, что $BD \perp DD_1$, а так как $AA_1 \parallel DD_1$, то $BD \perp AA_1$, а $BD \perp AC$ по условию. Отсюда плоскость ABC перпендикулярна плоскости диагонального сечения AA_1C_1C. Поэтому высота A_1O призмы лежит в плоскости этого сечения.

$$A_1O = \frac{S_{AA_1C_1C}}{AC} = \frac{30}{5} = 6.$$
$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5 = 10;\ V = S_{\text{осн}}\cdot A_1O = 60.$$

Ответ. 60.

Вар. 8. **1.** Пусть A_1O — высота призмы. Опустим из точки O перпендикуляры OE и OF соответственно на AC и AB. Тогда $A_1E \perp AC$ и $A_1F \perp AB$. По условию $A_1E = 7$ и $A_1F = 20$. Продолжим FO до пересечения с AC в точке K. Получим прямоугольный треугольник AFK, где $\angle FKA = 30°$. Из треугольника AA_1E имеем, что $AE = 24$, а из треугольника AA_1F получим, что $AF = 15$. Тогда из прямоугольного треугольника AFK получим, что $AK = 30$ и $EK = 6$. Из треугольника OEK имеем $OE = EK \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Теперь можно найти A_1O:

$$A_1O = \sqrt{A_1E^2 - OE^2} = \sqrt{49-12} = \sqrt{37};$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 50 \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3};\ V = 500\sqrt{3} \cdot \sqrt{37} = 500\sqrt{111}.$$

Ответ. $500\sqrt{111}$.

2. Диагональное сечение BB_1D_1D разбивает параллелепипед на две равные призмы. Исходя из условия можно доказать, что BB_1D_1D — квадрат. Пусть диагонали квадрата пересекаются в точке O. Опустим из точки O перпендикуляр OK на AA_1 и точку K соединим с точками B и D. Легко доказать, что BKD — перпендикулярное сечение призмы $ABDA_1B_1D_1$, $BD = a\sqrt{2}$.

$$OK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{a\sqrt{6}}{6};\ S_{BKD} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6};$$

$$V_{\text{призмы}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Тогда $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ответ. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

С—16

Вар. 1. **1.** $\frac{2h^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{27}$. **2.** $\frac{a^3\sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{3}$.

Вар. 2. **1.** $\frac{d^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{24}$. **2.** $\frac{a^3}{6} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta$.

Вар. 3. **1.** $\frac{4}{3}h^3 \cdot \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **2.** $\frac{5}{3}$.

Вар. 4. **1.** $\frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha+1}$. **2.** $72\sqrt{3}$.

Вар. 5. **1.** $\frac{d^3(1+\sin 2\alpha)}{3\sin^2\beta \cdot \cos\beta \cdot \sin 2\alpha}$.

2. Пусть $DABC$ — правильная треугольная пирамида и DO — ее высота. Построим высоту BE основания и из точки E опустим перпендикуляр EF на ребро DB. Точку F соединим с точками A и C; $\angle AFC = \alpha$ — линейный угол двугранного угла, образованного двумя смежными боковыми гранями. Из подобия треугольников DOB и EFB следует, что $\frac{DO}{EF} = \frac{OB}{FB}$. Отсюда $DO = \frac{EF \cdot OB}{FB}$, $EF = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $OB = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из треугольника EFB следует, что

$$FB = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда $DO = \dfrac{a \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}$,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Ответ. $\dfrac{a^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \dfrac{a^3\cos\frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1}}$.

Вар. 6. **1.** $\dfrac{2d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\sin\alpha}$. **2.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. **1.** Если боковые грани имеют равные площади, то высоты этих граней равны и вершина M равноудалена от прямых, на которых лежат стороны оснований. Так как в основании лежит правильный треугольник, то возможны три различных варианта, которые показаны на рисунке 34.

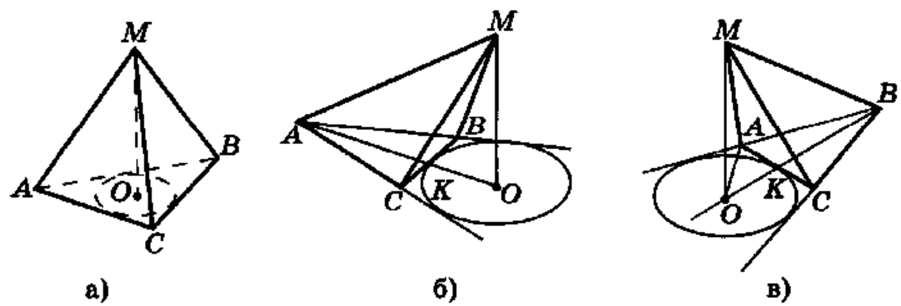


Рис. 34

а) Точка O — центр вписанной окружности:

$$AO = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ MO = \sqrt{2 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.\ S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

б) Точка O — центр вневписанной окружности. Радиус этой окружности может быть вычислен по формуле $r = \dfrac{2S}{a+b-c}$, S — площадь треугольника, a, b и c — его стороны. Тогда

$$r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$AO = AK + KO = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} > AM.$$

Следовательно, этот вариант не реализуется.

в) Точка O — центр вневписанной окружности: $AK = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $r = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $AO = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}} = \sqrt{2} = AM$. Следовательно, и этот вариант не реализуется.

Ответ. $\dfrac{1}{3}$.

2. Покажем, что точки M, P и C лежат на одной прямой (рис. 35).

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} =$$
$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

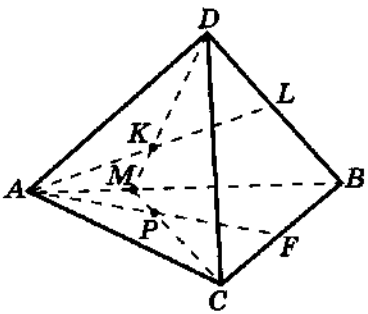


Рис. 35

Исходя из (1) и (2), имеем, что $\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{MP}$. Это и значит, что указанные три точки лежат на одной прямой. Аналогично и точки M, K и D лежат на одной прямой. В таком случае речь идет о плоскости MDC, которая делит пирамиду на две части, объемы которых относятся как $1 : 2$.

Ответ. $1 : 2$.

Вар. 8. 1. $\dfrac{\sqrt{105}}{4}$; $\dfrac{9}{4}$; $\dfrac{3\sqrt{11}}{4}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7, но в этом случае реализуются все три различные возможности.

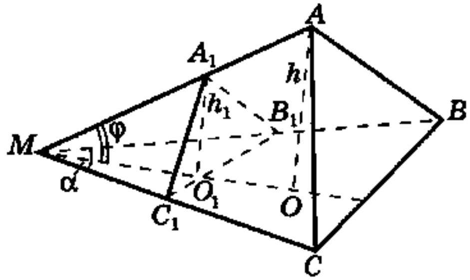


Рис. 36

2. Рассмотрим пирамиду, изображенную на рисунке 36. В пирамиде $MA_1B_1C_1$ площадь основания $S_1 = \frac{1}{2} MC_1 \cdot MB_1 \cdot \sin\alpha$. Высота пирамиды $h_1 = MA_1 \cdot \sin\varphi$.

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot MC_1 \cdot MB_1 \sin\alpha\, MA_1 \sin\varphi =$$
$$= \frac{1}{6} MC_1 \cdot MB_1 \cdot MA_1 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi.$$

Аналогично для пирамиды $MABC$

$$V = \frac{1}{6}\cdot MC \cdot MB \cdot MA \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi.$$

Тогда $\frac{V_1}{V} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1}{MA \cdot MB \cdot MC}$. В нашем случае $\frac{V_1}{V} = \frac{1\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 6\cdot 5} = \frac{1}{20}$.

Ответ. 1 : 19.

С—17

Вар. 1. 1. $\frac{256\pi\sqrt{3}}{9}$. 2. $\frac{\pi}{4}$.

Вар. 2. 1. 36π. 2. $\frac{\pi}{2}$.

Вар. 3. 1. $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$. 2. 100π.

Вар. 4. 1. $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. 2. $\frac{18\pi\sqrt{14}}{5}$.

Вар. 5. 1. $\dfrac{\pi a^3 \sin^2 2\beta \cdot \cos\beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{12 \sin^2\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$.

2. 60°. Указание. Необходимо доказать, что большее основание трапеции является диаметром основания конуса.

Вар. 6. **1.** $\frac{144\pi}{5}$.

2. 45°. Указание. Необходимо учесть, что суммы противоположных сторон трапеции должны быть равны. Если меньшую из боковых сторон принять за x, то $\sqrt{x^2+4}+x=6$. Отсюда $x=\frac{8}{3}$ и радиус основания конуса равен $\frac{4}{3}$. Остальное решение очевидно.

Вар. 7. **1.** По условию сечение наибольшей площади не совпадает с осевым сечением. Значит, угол между образующими в этом сечении прямой. Пусть сечением является треугольник AMB, где M — вершина конуса. Опустим из центра основания O перпендикуляр OK на AB и точки K и M соединим, $\angle MKO=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Треугольник AMB равнобедренный и прямоугольный, $MK=\frac{L\sqrt{2}}{2}$, $MO=MK\cdot\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{L\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{L\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{L}{\sqrt{3}}$. Радиус основания конуса $R=BO=\sqrt{L^2-\frac{L^2}{3}}=\frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $OK=\frac{L\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=$ $=\frac{L\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$; $\cos\angle KOB=\frac{OK}{OB}=\frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle AOB=120°$ и AB — сторона правильного треугольника. В таком случае треугольник AMB есть грань правильной треугольной пирамиды, вписанной в этот конус, причем боковые ребра этой пирамиды взаимно перпендикулярны. Объем пирамиды равен $\frac{L^3}{6}$. Объем конуса равен

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{2L^2}{3}\cdot\frac{L}{\sqrt{3}}=\frac{2L^3\sqrt{3}\,\pi}{27}.$$

Объем отсеченной части

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{2L^3\pi\sqrt{3}}{27}-\frac{L^3}{6}\right)=\frac{L^3}{162}(4\pi\sqrt{3}-9).$$

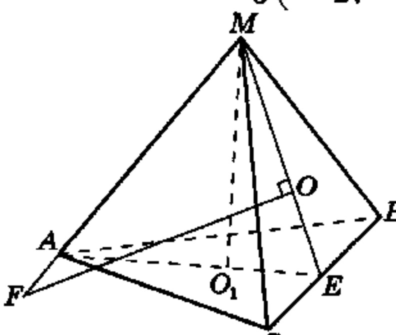


Рис. 37

Ответ. $\frac{L^3}{162}(4\pi\sqrt{3}-9)$.

2. На рисунке 37 FM, FO и MO соответственно образующая, высота и радиус основания конуса. Зная длины сторон треугольника CMB, можно найти радиус описанной около него окружности: $MO=\frac{25}{4}$.

Из треугольника AME, где $AM=10$, $ME=8$ и $AE=6\sqrt{3}$, находим косинус угла AME: $108 = 100 + 64 - 2 \cdot 80 \cos \angle AME$, $\cos \angle AME = \frac{7}{20}$. Тогда

$$\operatorname{tg} \angle AME = \frac{3\sqrt{39}}{7}, \quad FO = MO \cdot \operatorname{tg} \angle AME = \frac{25}{4} \cdot \frac{3\sqrt{39}}{7} = \frac{75\sqrt{39}}{28},$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{625}{16} \cdot \frac{75\sqrt{39}}{28} = \frac{15625\pi\sqrt{39}}{448}.$$

Ответ. $\frac{15625\pi\sqrt{39}}{448}$.

Вар. 8. 1. $\frac{H^3}{18}(8\pi + 3\sqrt{3})$. 2. $\frac{15625\pi\sqrt{15}}{1344}$. Указание. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 7.

С—18

Вар. 1. 1. 456. 2. $\frac{26\pi\sqrt{3}}{3}$.

Вар. 2. 1. $168\sqrt{3}$. 2. $\frac{560\pi}{3}$.

Вар. 3. 1. $\frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{12}$. 2. 576π.

Вар. 4. 1. $\frac{7m^3\sqrt{2}}{6}$. 2. 8064π.

Вар. 5. 1. Достроим усеченную пирамиду до полной пирамиды, частью которой является данная усеченная. Можно найти, что объем такой пирамиды равен $108\sqrt{3}$. Плоскость верхнего основания усеченной пирамиды делит объем полной пирамиды в отношении 1 : 27 (стороны основания относятся как 1 : 3). В таком случае объем усеченной пирамиды $V = \frac{26}{27} \cdot 108\sqrt{3} = 104\sqrt{3}$.

Ответ. $104\sqrt{3}$.

2. $54\pi\sqrt{3}$.

Вар. 6. 1. 268,8. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5. Объем полной пирамиды равен $\frac{1536}{5}$, а объем усеченной пирамиды $V = \frac{7}{8} \cdot \frac{1536}{5} = 268{,}8$.

2. $\frac{32000\pi\sqrt{3}}{3}$.

Вар. 7. 1. На рисунке 38 плоскости EA_1P и FB_1L перпендикулярны к плоскости основания. Многогранник AA_1DBB_1C разбился этими плоскостями на прямую

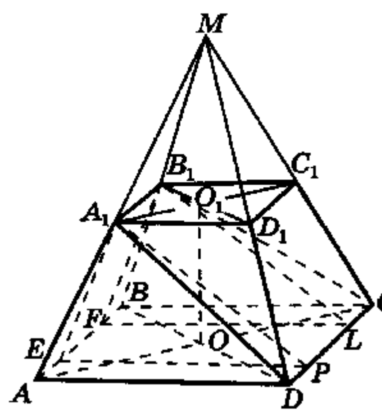


Рис. 38

призму EA_1PFB_1L и две равные пирамиды A_1AEPD и B_1BCLF. Пусть высота усеченной пирамиды равна h. Тогда объем призмы $V' = \frac{1}{2}ahb$, а объем пирамиды $V'' = \frac{1}{3}a \cdot \frac{a-b}{2} \cdot h = \frac{1}{2}a(a-b)h$. Объем многогранника AA_1DBB_1C

$$V_1 = V' + 2V'' = \frac{abh}{2} + \frac{a(a-b)\,h}{3} = \frac{h}{6}a(b+2a).$$

Объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{h^3}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Объем второго многогранника, который дополняет рассмотренный многогранник до усеченной пирамиды

$$V_2 = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) - \frac{h}{6}a(b+2a) = \frac{h}{6}b(a+2b).$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a(b+2a)}{b(a+2b)}.$$ Ответ. $\frac{a(b+2a)}{b(a+2b)}$.

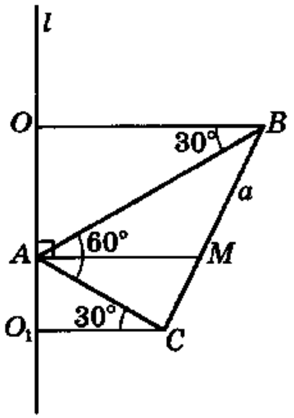


Рис. 39

2. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. Указание. Объем тела вращения может быть получен, если из объема усеченного конуса, полученного вращением трапеции $OBCO_1$ вокруг оси l, вычесть объемы конусов, полученных вращением треугольников OBA и O_1CA вокруг той же оси (рис. 39).

Вар. 8. 1. $\frac{11}{45}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

2. $\frac{2\pi a^3}{9}$. Указание. Объем тела вращения может быть получен, если из объема цилиндра, полученного вращением прямоугольника $AEFC$ вокруг оси l, вычесть объемы двух усеченных конусов, полученных вращением трапеций $AEOB$ и $CFOB$ вокруг той же оси (рис. 40). Следует отметить, что $\angle AOC = 60°$.

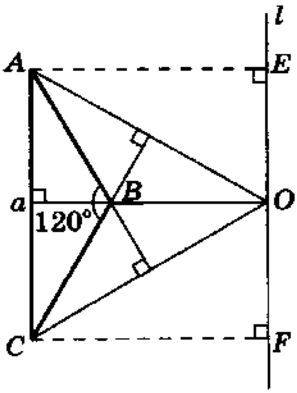


Рис. 40

С—19

Вар. 1. 1. $\frac{128\pi}{3}$. 2. $\frac{4}{9}$.

Вар. 2. 1. 12π. 2. $\frac{32}{9}$.

Вар. 3. 1. $\frac{52\pi}{3}$. 2. 36π.

Вар. 4. 1. $\frac{50\pi}{3}$. 2. $\frac{62500\pi}{81}$.

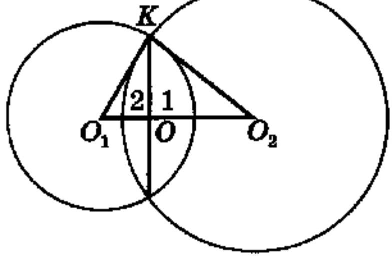


Рис. 41

Вар. 5. 1. На рисунке 41 изображено осевое сечение рассматриваемой фигуры.

$S_{O_1KO_2} = 126$; $KO = 12$;

$OO_1 = 5$; $OO_2 = 16$.

Высота первого сегмента $h_1 = 13 - 5 = 8$. Тогда его объем

$$V_1 = 64\pi\left(13 - \frac{8}{3}\right) = \frac{1984\pi}{3}.$$

Высота второго сегмента $h_2 = 20 - 16 = 4$. Тогда его объем

$$V_2 = 16\pi\left(20 - \frac{4}{3}\right) = \frac{896\pi}{3}.$$

Отсюда объем двояковыпуклого стекла

$$V = \frac{1984\pi}{3} + \frac{896\pi}{3} = 960\pi.$$

Ответ. 960π.

2. Пусть R — радиус вписанного шара, φ — величина угла между образующей конуса и плоскостью основания. Радиус основания конуса $r = R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. Высота конуса $H = R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\cdot R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi R^3\operatorname{tg}\varphi}{3\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\pi R^3}{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$. Исходя из условия, имеем

$$\frac{2\pi R^3}{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пусть $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = a > 0$. Тогда получаем уравнение

$$9a^2 - 9a + 2 = 0,$$

корни которого $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{3}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } \varphi = 60^\circ \text{ или } \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ и } \varphi = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ. 60° или $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Вар. 6. 1. $\frac{1444\pi}{3}$. Указание. Необходимо учесть, что центры шаров лежат по одну сторону от плоскости окружности, по которой пересекаются их поверхности.

2. $\pi - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ или $\pi - 4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

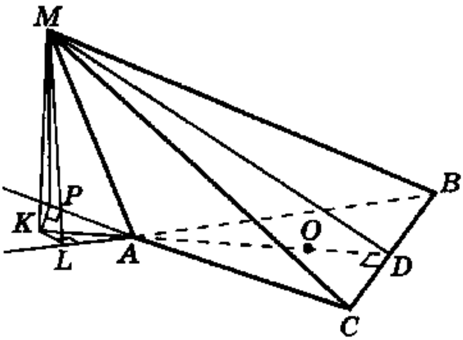


Рис. 42

Вар. 7. 1. Данная пирамида изображена на рисунке 42. В любой тетраэдр можно вписать шар. Радиус этого шара R может быть вычислен по формуле $R = \frac{3V}{S}$, где V — объем тетраэдра, а S — площадь его поверхности. Из точки K опустим перпендикуляр на сторону BC и продолжим стороны AC и AB. Тогда по теореме о трех перпендикулярах можно доказать, что $MD \perp AB$, $ML \perp AB$ и $MP \perp AC$; $KD = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $KA = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $KP = \frac{1}{2}KA = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$. Из треугольника MKD $MD = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{36}\right)} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$.

$$S_{BMC} = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

Из $\triangle MKL$ $ML = MP = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$S_{MAC} = S_{MAB} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad S = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{3}}. \quad R = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot 2}{4\cdot\sqrt[4]{3}\cdot 3\sqrt{3}} = 2^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{5}{4}}.$$

$$S_{\text{шара}} = 4\pi\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-\frac{5}{2}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

2. Объем полого шара $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$.

Так как толщина стенок 3 см, то $r = 6$ см. Тогда

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(729 - 216) = 684\pi \text{ см}^3.$$

Вес шара P равен $V_ш \rho_ш g$, где $\rho_ш$ — плотность материала. Погруженная в воду часть шара есть шаровой сегмент, объем которого

$$V_с = \pi \cdot 144\left(9 - \frac{12}{3}\right) = 720\pi \text{ см}^3.$$

Выталкивающая сила

$$F = V_с \rho_в g = 720\pi\rho_в g \text{ (1 г/см}^3 \text{ — плотность воды).}$$

По закону Архимеда $P = F$, т. е. $684\pi\rho_ш g = 720\pi\rho_в g$. Отсюда

$$\rho_ш \approx 1{,}05 \text{ г/см}^3.$$

Вар. 8. 1. $\frac{4\pi}{27}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. Необходимо учесть, что $KE = KP = KF$ (рис. 43). Тогда высоты боковых граней пирамиды равны между собой и $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot MP$.

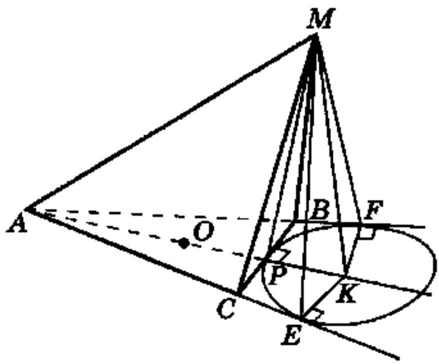


Рис. 43

2. Вес полого шара $P = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\rho_ш g$, выталкивающая сила $F = \frac{2}{3} \cdot \pi R^3 \rho_в g$. Так как $P = F$, то

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\rho_ш g = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_в g;$$

$$2(R^3 - r^3)\rho_ш = R^3\rho_в; \qquad 2\left(1 - \left(\frac{2}{R}\right)^3\right)\frac{\rho_ш}{\rho_в} = 1.$$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^3 = 1 - \frac{\rho_в}{2\rho_ш}; \qquad \frac{r}{R} = \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_в}{2\rho_ш}} \text{ и } r = R\sqrt[3]{1 - \frac{\rho_в}{2\rho_ш}}.$$

Тогда толщина стенок шара

$$h = R - r = R\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_в}{2\rho_ш}}\right).$$

Ответ. $R\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_в}{2\rho_ш}}\right)$.

ДС

Вар. 1. 1. $2x - 3y + z - 10 = 0$. 2. $\arccos\frac{3\sqrt{21}}{42}$.

Вар. 2. 1. $m = \frac{7}{4}$. 2. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вар. 3. 1. Можно доказать, что расстояние от точки $A(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$ может быть вычислено по формуле $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

В нашем случае $d = \dfrac{|-2 - 3 + 4 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \dfrac{2}{3} < R$ $(R = 1)$.

Радиус сечения $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $S = \dfrac{5\pi}{9}$. Ответ. $\dfrac{5\pi}{9}$.

2. Общий вид уравнения плоскости, которая параллельна оси Oz: $ax + by + d = 0$. Так как точки $A(1; 0; -2)$ и $B(0; 3; 1)$ принадлежат этой плоскости, то $\begin{cases} a + d = 0 \\ 3b + d = 0. \end{cases}$ Отсюда $a = -d$, $b = -\dfrac{d}{3}$.

Тогда имеем $-dx - \dfrac{d}{3}y + d = 0$, и так как $d \neq 0$, то $3x + y - 3 = 0$.

Ответ. $3x + y - 3 = 0$.

Вар. 4. 1. Указание. Необходимо доказать, что расстояние от центра шара $M(3; 2; -4)$ до указанной плоскости равно 6.

2. $y - z - 2 = 0$. Указание. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 3.

Вар. 5. 1. Пусть $A_1(x; y; z)$ — искомая точка и пусть отрезок AA_1 пересекает указанную плоскость в точке P. Вектор, перпендикулярный плоскости, $\vec{n}\{1; 1; -1\}$. Так как $AA_1 \perp \alpha$, то $\overrightarrow{AA_1} = k \cdot \vec{n}$, $\overrightarrow{AA_1}\{k; k; -k\}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AA_1}\{x - 1; y - 1; z - 1\}$. Тогда имеем

$$\begin{cases} x - 1 = k \\ y - 1 = k \\ z - 1 = -k, \end{cases} \quad \begin{cases} x = k + 1 \\ y = k + 1 \\ z = 1 - k. \end{cases}$$

Точка P является серединой отрезка AA_1 и $P\left(\dfrac{k+2}{2}; \dfrac{k+2}{2}; \dfrac{2-k}{2}\right)$. Так как точка P принадлежит плоскости α, то $\dfrac{k+2}{2} + \dfrac{k+2}{2} - \dfrac{2-k}{2} - 2 = 0$. Отсюда $k = \dfrac{2}{3}$ и $x = \dfrac{5}{3}$, $y = \dfrac{5}{3}$, $z = \dfrac{1}{3}$.

Ответ. $A_1\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{5}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

2. Указанная прямая пересекает ось Ox в точке $A(-1; 0; 0)$ и ось Oy в точке $B(0; 1; 0)$. Точки A, B и M определяют плоскость $ax + by + cz + d = 0$. Так как указанные точки принадлежат плоскости, то

$$\begin{cases} -a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ a + b - 2c + d = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\begin{cases} a = d \\ b = -d \\ c = \dfrac{d}{2}. \end{cases}$

В таком случае уравнение плоскости имеет вид

$$2x - 2y + z + 2 = 0.$$

Ответ. $2x - 2y + z + 2 = 0$.

Вар. 6. **1.** Пусть $P\ \{x;\ y;\ z\}$. Так как точка P лежит на прямой EF, то $\overrightarrow{EP} = k \cdot \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EF}\ \{1;\ 1;\ 2\}$, $\overrightarrow{EP}\ \{x - 1;\ y + 2;\ z - 1\}$. Отсюда

$$\begin{cases} x - 1 = k \\ y + 2 = k \\ z - 1 = 2k, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = k + 1 \\ y = k - 2 \\ z = 2k + 1. \end{cases}$$

С другой стороны, точка P лежит на плоскости, а потому

$$k + 1 - 2\ (k - 2) + 2k + 1 - 3 = 0 \text{ и } k = -3.$$

В таком случае $\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \\ z = -5. \end{cases}$

Ответ. $P\ (-2;\ -5;\ -5)$.

2. Пусть искомая плоскость имеет вид $ax + by + cz + d = 0$. Так как плоскость $x - 2y + z - 1 = 0$ и искомая перпендикулярны, то векторы, перпендикулярные этим плоскостям, $\vec{n_1}\ \{a;\ b;\ c\}$ и $\vec{n_2}\ \{1;\ -2;\ 1\}$, тоже перпендикулярны между собой. Тогда $a - 2b + c = 0$. Кроме того, координаты данных точек E и F удовлетворяют уравнению плоскости, т. е.

$$a - b + c + d = 0 \text{ и } 2a + b - c + d = 0.$$

Решив полученную систему уравнений, получаем уравнение искомой плоскости $2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

Вар. 7. **1.** Пусть MO — высота пирамиды. Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат; O — начало координат, ось Ox сонаправлена с лучом BA, ось Oy — с лучом AD, а ось Oz — с лучом OM. Напишем уравнение плоскости DMC:

$$D\ (1;\ 1;\ 0);\ C\ (-1;\ 1;\ 0);\ M\ (0;\ 0;\ 1).$$

Координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Имеем систему уравнений $\begin{cases} a + b + d = 0 \\ -a + b + d = 0 \\ c + d = 0. \end{cases}$

Отсюда можно получить, что уравнение плоскости имеет вид

$$y + z - 1 = 0.$$

Вектор, перпендикулярный этой плоскости: $\vec{n}\,\{0;\ 1;\ 1\}$. Если φ — искомый угол, то

$$\sin\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\vec{n}|}\right|;\ \overrightarrow{AM}\,\{-1;\ 1;\ 1\};\ \sin\varphi = \left|\frac{1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

$\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Ответ. $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Так как искомая плоскость должна быть параллельна направлению вектора $\vec{m}$, то в плоскости должна быть прямая, параллельная этому направлению. Для этого найдем третью точку C искомой плоскости как образ точки $A\ (1;\ -1;\ 1)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{m}\ \{3;\ 1;\ -1\}$: $C\ (4;\ 0;\ 0)$. Тогда мы имеем три точки A, B и C, определяющие искомую плоскость. Теперь достаточно просто написать уравнение этой плоскости.

Ответ. $x - 5y - 2z - 4 = 0$.

Вар. 8. 1. $60°$. Указание. Необходимо поместить пирамиду в прямоугольную систему координат и найти уравнение плоскостей AMD и DMC. Тогда если $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — векторы, перпендикулярные этим плоскостям и φ — искомый угол, то $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$.

2. Найдем две точки A и B, принадлежащие линии пересечения плоскостей.

1) Пусть $x = 0$. Тогда $\begin{cases}-y + z - 1 = 0\\ y - 2z - 2 = 0.\end{cases}$

Отсюда $y = -4$, $z = -3$ и $A\ (0;\ -4;\ -3)$.

2) Пусть $z = 0$. Тогда $\begin{cases}2x - y - 1 = 0\\ x + y - 2 = 0.\end{cases}$

Отсюда $x = 1$, $y = 1$ и $B\ (1;\ 1;\ 0)$. Плоскость, проходящая через точку M, должна быть перпендикулярна вектору $\overrightarrow{AB}\ \{1;\ 5;\ 3\}$. Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$1\,(x-1) + 5\,(y-1) + 3\,(z-1) = 0,$$

т. е. $x + 5y + 3z - 9 = 0$. Ответ. $x + 5y + 3z - 9 = 0$.

Работы на повторение

П—1

Вар. 1. 1. 1) Скрещивающиеся; 2) скрещивающиеся; 3) скрещивающиеся. 2. Прямоугольник; $\dfrac{2a^2}{9}$. 3. 1) $60°$; 2) $\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. $\arcsin\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$. Возможен ответ: $90° - \mathrm{arctg}\,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. Для нахождения угла между AB и DC проведем прямую $l \parallel AB$ (рис. 44). Угол между DC и l является искомым. Из точки B опустим перпендикуляр BE на l и точку E соединим с точкой D. Легко доказать, что $DE \perp CE$.

$$DE = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \quad \left(BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}\right);\ CE = \frac{a}{2}.$$

Тогда $\operatorname{tg} \angle DCE = \dfrac{DE}{CE} = \sqrt{7}$ и $\angle DCE = \operatorname{arctg}\sqrt{7}$. Ответ. $\operatorname{arctg}\sqrt{7}$.

6. Плоскость $CDE \parallel AB$. Расстояние между прямыми AB и DC равно расстоянию от прямой AB до плоскости CDE. Можно доказать, что оно равно высоте BK треугольника DBE (см. рис. 44).

$$BK = \frac{BE \cdot DB}{DE} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a \cdot 2}{2 \cdot a \cdot \sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Вар. 2. 1. 1) Скрещивающиеся; 2) скрещивающиеся; 3) пересекающиеся.

2. Прямоугольная трапеция; $\dfrac{3a^2\sqrt{5}}{8}$.

3. 1) $\operatorname{arctg} 2$; 2) $90°$.

4. $30°$. 5. $60°$. 6. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Указание. Задачи 5 и 6 решаются аналогично задачам 5 и 6 из варианта 1.

Вар. 3. 1. 1) Скрещивающиеся; 2) скрещивающиеся; 3) параллельные. 2. Равнобедренная трапеция; $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

3. 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 4. $45°$.

5. Все необходимые построения показаны на рисунке 45. $OK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$; $MO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MK = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{18a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{4}$; $KD = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;

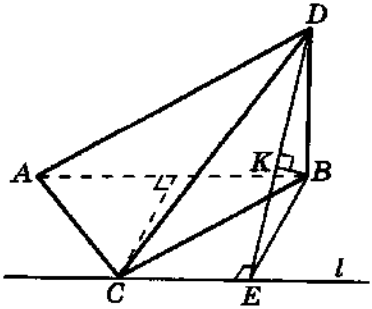


Рис. 44

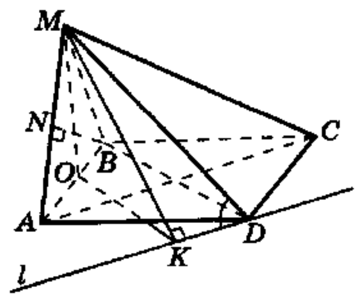


Рис. 45

$$\operatorname{tg} MDK = \frac{MK}{KD} = \frac{a\sqrt{30}\cdot 4}{4\cdot a\sqrt{2}} = \sqrt{15};\ \angle MDK = \operatorname{arctg}\sqrt{15}.$$

Ответ. $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$.

6. Расстояние между BC и MD равно высоте BN треугольника AMB. Необходимо учесть, что $BC \parallel AMD$, а BN есть расстояние между BC и плоскостью AMD, т. е. расстояние между указанными скрещивающимися прямыми.

Ответ. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Вар. 4. 1. 1) Скрещивающиеся; 2) скрещивающиеся; 3) скрещивающиеся.

2. Равнобедренный треугольник; $\frac{a^2\sqrt{15}}{16}$.

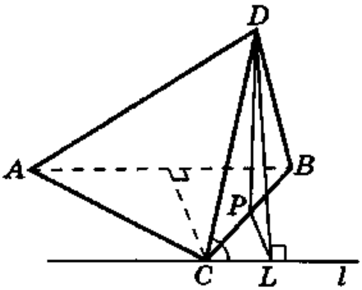


Рис. 46

3. 1) arctg 2; 2) 2 arctg $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. arctg $\frac{\sqrt{39}}{13}$.

5. 1) 90°; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Указание. См. построения, данные на рисунке 46.

6. $\frac{a\sqrt{16}}{4}$.

П—2

Вар. 1. 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{1}$; 2) $8(13+\sqrt{34})$. Указание. Целесообразно построить перпендикулярное сечение призмы и находить площадь боковой поверхности как произведение периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро; 3) $\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Вар. 2. 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$; 2) $8(\sqrt{3}+\sqrt{7})$; 3) 2 arctg $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Вар. 3. 1) $24(\sqrt{6}+\sqrt{15})$. Указание. Площадь боковой поверхности целесообразно находить суммированием площадей боковых граней, учитывая, что грань CC_1B_1B является прямоугольником; 2) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$; 3) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$. Указание. Искомым расстоянием является длина высоты треугольника, полученного при построении сечения, указанного в предыдущем пункте.

Вар. 4. 1) $\frac{V_1}{V_1} = \frac{5}{17}$. Указание. Плоскость сечения пересекает плоскость основания по биссектрисе AF ($O \in AF$), которая делит сторону основания в отношении 5 : 6. В таком случае $S_{AFB} = \frac{5}{11} S_{ABC}$; 2) 128; 3) $\arcsin \frac{32\sqrt{41}}{205}$.

П—3

Вар. 1. 1) $32\pi\sqrt{3}$; 2) $180°\sqrt{3} \approx 311°46'$; 3) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{27}$; 4) 256π.

Вар. 2. 1) 64π; 2) $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} \approx 35°19'$; 3) да, можно; $\frac{V_{ш}}{V_{цил}} = \frac{2}{3}$; 4) 128π.

Вар. 3. 1) 100π; 2) $\frac{1625\pi\sqrt{3}}{12}$; 3) 180°, 15 и 5; 4) пусть $ABCD$ — осевое сечение усеченного конуса, $AD = 15$, $BC = 5$, $AB = CD = 10$. Радиус описанного шара равен радиусу описанной около треугольника ABD окружности.

$$BD = \sqrt{100 + 225 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}} = 5\sqrt{7};\ 5\sqrt{7} = 2R_{ш} \cdot \sin 60°.$$

Отсюда $R_{шара} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ и $S = 4\pi \frac{25 \cdot 7}{3} = \frac{700\pi}{3}$. Ответ. $\frac{700\pi}{3}$.

Вар. 4. 1) $36\pi\sqrt{2}$; 2) 36. Указание. Наибольшую площадь имеет осевое сечение; 3) $\frac{V_{кон}}{V_{цил}} = \frac{1}{6}$; 4) пусть треугольник AMB — осевое сечение конуса. Тогда радиус вписанной окружности является радиусом вписанного в конус шара. Центр шара O делит высоту конуса в отношении $1 : \sqrt{2}$, считая от основания (используется свойство биссектрисы угла треугольника). Отсюда следует, что

$$R_{шара} = \frac{6}{\sqrt{2}+1} = 6(\sqrt{2}-1),\ V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi(\sqrt{2}-1)^3.$$

Ответ. $288\pi(\sqrt{2}-1)^3$.

П—4

Вар. 1. **1.** 1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. Очевидно, что $C_1\,(3; -2; 5)$, $B_1\,(-1; -1; 5)$ и $E\,(2; 0; 5)$; $\overrightarrow{AE}\,\{1; -2; 3\}$, $\overrightarrow{CB_1}\,\{-4; 1; 3\}$. По условию плоскость перпендикулярна CB_1. В таком случае φ — искомый угол, тогда

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB_1}|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|},$$

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB_1}=-4-2+9=3.\ |\overrightarrow{AE}|=\sqrt{14};\ |\overrightarrow{CB_1}|=\sqrt{26}.$$
$$\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}=\frac{3\cdot\sqrt{91}}{182};\ \varphi=\arcsin\frac{3\sqrt{91}}{182}.$$

Ответ. $\arcsin\frac{3\sqrt{91}}{182}$.

Вар. 2. **1.** 2) Пусть E — середина AC, а F — середина MB.
$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CB});\ \overrightarrow{EF}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\cdot\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CB}).$$

В пункте 1) было доказано, что $AM\perp CB$. Поэтому
$$\overrightarrow{EF}^2=\frac{1}{4}(4a^2+a^2+0)=\frac{5a^2}{4}.$$

Отсюда $EF=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

2. Основание пирамиды $ABCD$ лежит в плоскости $z=2$. Тогда, исходя из условия, следует, что высота пирамиды $H=3$. $\overrightarrow{AC}\,\{-2;\,4;\,0\}$, $\overrightarrow{BD}\,\{5;\,0;\,0\}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{BD}|=5$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-10$.

Если φ — угол между диагоналями оснований, то
$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$
$$S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\sin\varphi;$$
$$\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$
$$S=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot5\frac{2}{\sqrt{5}}=10.$$
$$V=\frac{1}{3}\cdot10\cdot3=10.$$

Ответ. 10.

Вар. 3. **1.** 1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. Указание. Необходимо куб поместить в прямоугольную систему координат и учесть, что диагональ AC_1 перпендикулярна к плоскости A_1DB. Тогда если φ — искомый угол, то $\sin\varphi=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}$.

Вар. 4. **1.** 1) Разложим вектор $\overrightarrow{EM}$ по базисным векторам $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD});$$
$$\overrightarrow{EM}^2=\frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})=$$
$$=\frac{1}{9}\left(a^2+a^2+\frac{a^2}{4}+a^2-\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^2}{4};\ EM=\frac{a}{2}.$$

Ответ. $\frac{a}{2}$.

2. $\arccos\frac{\sqrt{33}}{11}$. Указание. Пусть MO — высота пирамиды. Тогда целесообразно точку O принять за начало координат, ось Ox направить по лучу, сонаправленному с лучом OA, ось Oy направить по лучу, сонаправленному с лучами BC и AD, а ось Oz — по лучу OM.

Контрольные работы

К—1

Вар. 1. 1. 60°. 2. 1) 90°; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. Пусть $A\ (0;\ y;\ 0)$ и пусть φ — искомый угол.

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}\ \vec{j}})|;\ \overrightarrow{AB}\ \{1;\ -y;\ 1\};\ \vec{j}\ \{0;\ 1;\ 0\};$$
$$\sin\varphi=\left|\frac{-y}{\sqrt{2+y^2}\cdot 1}\right|=\frac{1}{2};\quad \frac{y^2}{2+y^2}=\frac{1}{4}.$$

Отсюда $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ответ. $\left(0;\ \sqrt{\frac{2}{3}};\ 0\right)$ или $\left(0;\ -\sqrt{\frac{2}{3}};\ 0\right)$.

4*. Пусть $a\ \{6k;\ 8k;\ -7{,}5k\}$.

$$\sqrt{36k^2+64k^2+\frac{225}{4}k^2}=\frac{25}{2}|k|.$$

По условию $\frac{25}{2}|k|=50$. Отсюда $|k|=4$. Угол между вектором $\vec{a}$ и вектором $\vec{j}\ \{0;\ 1;\ 0\}$ тупой. Это значит, что $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}<0$. Имеем $0+8k-0<0$. Отсюда $k<0$ и $k=-4$.

Ответ. $\vec{a}\ \{-24;\ -32;\ 30\}$.

Вар. 2. 1. 1) $180°-\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $\sqrt{2}$.

2. Рассмотрим базисные векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Пусть $AC=CB=BB_1=a$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}.\quad \cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|};$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB_1} = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}) = a^2 - a^2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 - 0 = \frac{3a^2}{2}.$$

$$|\overrightarrow{AB}| = a\sqrt{3};\ |\overrightarrow{CB_1}| = a\sqrt{2}.\quad \cos\varphi = \frac{3a^2}{2a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$.

3. Пусть $A\ (x;\ x;\ 0)$ и пусть φ — искомый угол.

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}\ \vec{i}})|;\ \vec{i}\ \{1;\ 0;\ 0\};\ \overrightarrow{AB}\ \{x - 1;\ x - 1;\ -1\};$$

$$\sin\varphi = \frac{|x - 1|}{\sqrt{2(x-1)^2 + 1}} = \frac{1}{2};\ \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2 + 1} = \frac{1}{4};$$

$$4\ (x - 1)^2 = 2\ (x - 1)^2 + 1;\ 2\ (x - 1)^2 = 1;\ x - 1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{или}\ x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $A\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$ или $A\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$.

4*. Пусть $\overrightarrow{OM}\ \{x;\ y;\ z\}$. Из условия следует, что $7x = 0$ и $3z = 0$. Следовательно искомое множество есть пересечение плоскостей yOz и xOy, т. е. ось Oy. Ответ. Ось Oy.

Вар. 3. **1.** $2\sqrt{5}$.

2. 1) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **3.** $A(0;\ 0;\ 2\sqrt{6})$ или $A(0;\ 0;\ -2\sqrt{6})$.

4*. $\vec{b}\left\{\frac{8}{3};\ -\frac{10}{3};\ \frac{13}{3}\right\}$. Задача решается аналогично задаче из варианта 1.

Вар. 4. **1.** 1) $\arccos\frac{2\sqrt{22}}{11}$; 2) $\sqrt{5}$. **2.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. $M(\sqrt{2} + 1;\ 0;\ \sqrt{2} + 1)$ или $M(1 - \sqrt{2};\ 0;\ 1 - \sqrt{2})$. **4*.** Ось Ox.

К—2

Вар. 1. **1.** $4\pi(\sqrt{2} + 4)$.

2. 1) $4\pi R^2 \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi$; 2) $\frac{R^2}{2}$. Указание. Так как угол $\varphi = 30°$, то наибольший угол между образующими тупой, а потому наибольшую площадь имеет сечение со взаимно перпендикулярными образующими. Площадь такого сечения равна $\frac{L^2}{2}$.

3*. Точки A, B и C имеют координаты $A(\sqrt{3};0;0)$, $B(0;\sqrt{3};0)$, $C(0;0;3)$. Из точки O опустим перпендикуляр OK на AB и точку K соединим с точкой C. $\angle CKO = \varphi$ искомый.

$$OK = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{OC}{OK} = \frac{3\cdot 2}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Ответ. $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{6}$.

Вар. 2. 1. $48\pi\sqrt{2}$. 2. 1) $18R^2\sqrt{3}$; 2) $\pi R\sqrt{3}$.

3*. Уравнение сферы имеет вид $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=32$. Центр сферы $O(1;2;0)$. Пусть T — точка касания. Тогда треугольник OTM прямоугольный ($\angle OTM = 90°$). $OM = \sqrt{64+1+16} = 9$, $MT = \sqrt{81-32} = 7$.

Вар. 3. 1. $4\pi a^2\sqrt{3}$. 2. 1) $\dfrac{4\pi^2}{3\sin^2 2\alpha}$; 2) $30°$.

3*. Находим координаты точек A и B: $A(0;-2;0)$; точка B, принадлежащая сфере, имеет координаты $(1;1;z)$. Исходя из уравнения сферы, имеем $0+1+z^2=5$; $z=\pm 2$.

Так как $z>0$, то $B(1;1;2)$.

$$AB = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}.$$

Длина перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость xOz, равна 2. Если φ — искомый угол, то

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7},\ \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

Вар. 4. 1. $\dfrac{3\pi\sqrt{5}}{2}$; 2. 1) $6a^2$; 2) $\dfrac{3\pi a^2}{16}$.

3*. Данная плоскость пересекает плоскость xOy по прямой, проходящей через точку $K(4;2;0)$, и пересекает ось Ox в точке A, а ось Oy в точке B. Исходя из условия, треугольник AOB равнобедренный прямоугольный, причем $OA = OB = 6$. Высота этого треугольника OP равна $3\sqrt{2}$. Это и есть расстояние от центра шара до данной плоскости; $d = 3\sqrt{2} < R$. Тогда радиус линии пересечения

$$r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{25-18} = \sqrt{7}.$$

Отсюда длина искомой окружности равна $2\pi\sqrt{7}$.

К—3

Вар. 1. 1. 192. 2. $\dfrac{2\pi d^3\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi}$.

3*. На рисунке 47 $\angle DEO = 60°$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью боковой грани и плоскостью основания. EO_1 — биссектриса этого угла, O_1 — центр вписанного

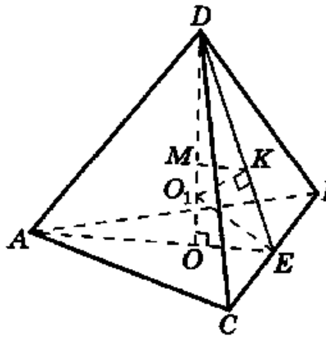


Рис. 47

шара, $O_1O = O_1K$ ($O_1K \perp DE$) — радиусы этого шара. MK — радиус окружности, по которой поверхность шара касается боковой поверхности пирамиды. $\angle MO_1K = \angle DEO = 60°$; $MO_1 = \frac{1}{2}O_1K$ — расстояние от центра шара до плоскости сечения.

$$R_{\text{шара}} = OE \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$h_{\text{сегм}} = R_{\text{шара}} - MO_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{\text{сегм}} = \pi \cdot \frac{4 \cdot 3}{9}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Вар. 2. 1. 1024. 2. $\frac{\pi R^3 \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi}{3}$.

3*. Диагональ призмы является диаметром описанного около нее шара и равна $8\sqrt{5}$. Так как плоскость, перпендикулярная к диагоналям, делит ее в отношении 1 : 3, то высота меньшего сегмента, отсеченного этой плоскостью от шара, равна $2\sqrt{5}$. Радиус шара равен $4\sqrt{5}$.

$$V_{\text{сегм}} = \pi \cdot 20\left(4\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{200\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Вар. 3. 1. $\frac{2048}{9}$. 2. $\frac{2\pi m \sqrt[3]{\cos\varphi}}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}$.

3*. $\frac{320\pi}{81}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 3* из варианта 1.

Вар. 4. 1. $\frac{16\sqrt{6}}{3}$. 2. $\frac{\pi h^3 \operatorname{ctg}^3\varphi}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

3*. Центр описанного шара лежит на середине высоты призмы, проведенной через центр описанной вокруг основания окружности. В таком случае $R_{\text{шара}} = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + R^2}$, где H — высота призмы, а R — радиус описанной вокруг основания окружности; $H = 2\sqrt{2}$, $R = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $R_{\text{шара}} = \sqrt{2 + \frac{32}{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. Расстояние от центра шара до боковой грани равно радиусу вписанной в основание окружности, т. е. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. В таком случае $h_{\text{сегм}} = \frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

$$V_{\text{сегм}} = 2\pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.$$

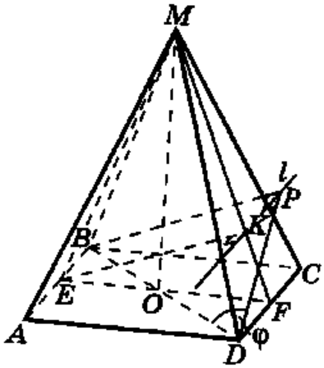


Рис. 48

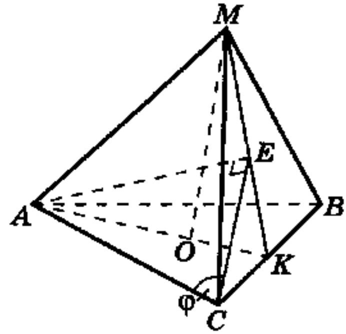


Рис. 49

К—4

Вар. 1. 1. 48. 2. $12\sqrt{7}$. 3. $\arccos\frac{3}{4}$. 4. 36. 5. $\frac{625\pi}{7}$.

6*. На рисунке 48 изображена правильная четырехугольная пирамида $MABCD$. Плоскость EMF (ME и MF — апофемы пирамиды) перпендикулярна к плоскости основания; $EK \perp MF$. Можно доказать, что $EK \perp DMC$. Через AB и EK проведена плоскость, которая пересекает плоскость DMC по прямой l, параллельной AB. В этой плоскости $BP \parallel EK$. Тогда $BP \perp DMC$ и $\angle BDP = \varphi$ — угол между BD и плоскостью DMC. Следует учесть, что $BP = EK$, $MF = 4$, $MO = \sqrt{7}$, $EK \cdot MF = MO \cdot EF$. Отсюда

$$EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{\sqrt{7}\cdot 6}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

$$\sin\varphi = \frac{BP}{BD} = \frac{3\sqrt{7}}{2\cdot 6\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{8}; \quad \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

Вар. 2. 1. $6\sqrt{39}$. 2. $12\sqrt{3}$. 3. $\arccos\frac{4}{5}$. 4. -12.

5. $\frac{32\pi}{81}(\sqrt{13}-2)^3$.

6*. На рисунке 49 изображена правильная треугольная пирамида $MABC$; MK — апофема пирамиды. В плоскости AMK проводим $AE \perp MK$. Можно доказать, что $AE \perp BMC$, $MK = \sqrt{13}$, $AO = 4$, $MO = 3$.

$$AK \cdot MO = AE \cdot MK; \quad AE = \frac{AK\cdot MO}{MK} = \frac{6\cdot 3}{\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13}.$$

$\angle ACE = \varphi$ — угол между AC и плоскостью BMC.

$$\sin\varphi = \frac{AE}{AC} = \frac{18\sqrt{13}}{13\cdot 4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{39}}{26}; \quad \varphi = \arcsin\frac{3\sqrt{39}}{26}.$$

Вар. 3. 1. $32\sqrt{7}$. 2. $\frac{128\sqrt{3}}{3}$.

3. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}$. 4. 48. 5. $\frac{2048\sqrt{3}}{27}$.

6*. На рисунке 50 изображена правильная четырехугольная пирамида $MABCD$; $EK \perp DMC$. Плоскость, проходящая через AB и EK, пересекает плоскость DMC по прямой $l \parallel AB$. В этой плоскости строим $AP \parallel EK$. Тогда $AP \perp DMC$ и $\angle AMP = \varphi$ — угол между AM и плоскостью DMC,

$$OC = 4,\ MO = 4\sqrt{3},\ AC = 8,\ EF = CD = 4\sqrt{2},\ FC = 2\sqrt{2},$$

$$MF = \sqrt{64-8} = 2\sqrt{14};\ EK \cdot MF = MO \cdot EF.$$ Отсюда

$$EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{2}}{2\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}};\quad AP = EK;$$

$$\sin\varphi = \frac{AP}{AM} = \frac{\sqrt{21}}{7},\ \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Вар. 4. **1.** $6\sqrt{3}$. **2.** 3. **3.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** -3. **5.** $\frac{4}{3}\pi$.

6*. На рисунке 51 изображена правильная треугольная пирамида $MABC$; $BT \perp AMC$. Через середину BC, точку E, строим прямую, параллельную AC. Она пересекает BK в точке F. В плоскости KMB строим $FD \parallel BT$. Тогда $FD \perp AMC$. Плоскость, проходящая через FE и FD, пересекает плоскость AMC по прямой $l \parallel EF$. В этой плоскости строим $EP \parallel FD$. Тогда $EP \perp AMC$, причем $EP = FD$. $\angle PME = \varphi$ — угол между ME и плоскостью AMC,

$$MO = \sqrt{3},\ BK = 3,\ ME = MK = 2,\ BT \cdot KM = MO \cdot KB,$$

$$BT = \frac{MO \cdot KB}{KM} = \frac{\sqrt{3}\cdot 3}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2},\ PD = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

а так как $EP = FD$, то

$$EP = \frac{3\sqrt{3}}{4};\ \sin\varphi = \frac{PE}{ME} = \frac{3\sqrt{3}}{8},\ \varphi = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

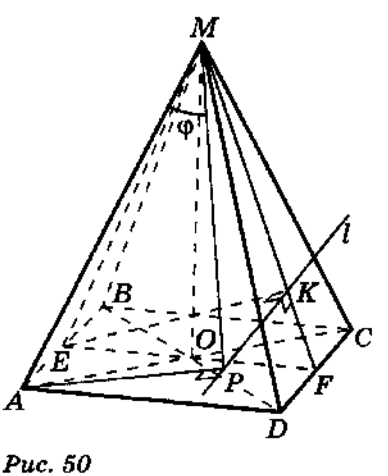


Рис. 50

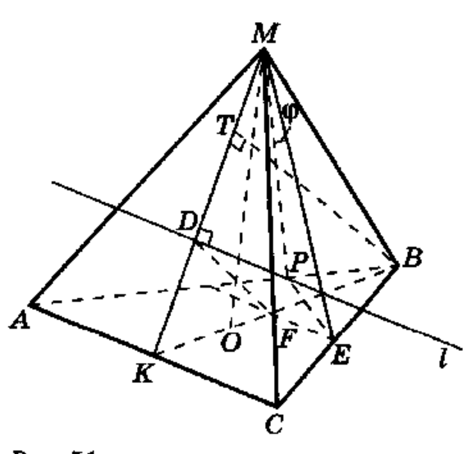


Рис. 51

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТ ПО ПУНКТАМ И ГЛАВАМ УЧЕБНИКА

Работа	Тема	Пункт учебника
С—1	Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора	46, 47
С—2	Связь между координатами векторов и координатами точек. Простейшие задачи в координатах	48, 49
С—3	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	50, 51
С—4	Вычисление углов между прямыми и плоскостями	52
С—5	Движения	54—58
С—6	Применение движений пространства к решению задач	54—58
С—7	Цилиндр. Комбинации цилиндра с многогранниками	59, 60
С—8	Конус, усеченный конус	61—63
С—9	Площадь поверхности тела вращения. Комбинации конуса с многогранниками	62, 63
С—10	Уравнение сферы. Взаимное расположение сферы и плоскости	64—66
С—11	Сфера	64—68
С—12	Комбинации сферы с другими геометрическими телами	70, 71
С—13	Объем прямоугольного параллелепипеда	75
С—14	Объем прямой призмы и цилиндра	76, 77
С—15	Объем наклонной призмы	79
С—16	Объем пирамиды	80
С—17	Объем конуса	81
С—18	Объем усеченной пирамиды и усеченного конуса	80, 81
С—19	Объем шара и его частей. Площадь сферы	82—84
ДС	Уравнение плоскости	53
П—1	Взаимное расположение прямых и плоскостей. Перпендикулярность прямых и плоскостей	гл. I, II
П—2	Многогранники	гл. III
П—3	Тела вращения	гл. VI
П—4	Координаты и векторы	гл. IV, V
МД—1	Координаты и векторы	гл. V
МД—2	Цилиндр, конус, шар	гл. VI
МД—3	Объемы тел	гл. VII
К—1	Координаты и векторы	гл. V
К—2	Цилиндр, конус, шар	гл. VI
К—3	Объемы тел	гл. VII
К—4	Итоговое повторение	

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Зив Борис Германович

ГЕОМЕТРИЯ
ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
11 КЛАСС

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *С. В. Дубова*
Художники *О. В. Корытов, О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Техническое редактирование и компьютерная верстка *Н. В. Лукиной*
Корректоры *А. К. Райхчин, Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 05.02.16. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSP. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,77. Доп. тираж 1500 экз. Заказ № 1069.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ООО «Тульская типография».
300026, г. Тула, пр-т Ленина, 109.